

講演を始める前に



本日のハンドアウトのダウンロードサイトにとびます。



<https://x.gd/2VFex>

生涯学習推進センター

しもまっちの数学随想

～数学は過去からの贈り物、そして未来へのメッセージ～

2024年6月11日（火） 13:00～14:30



下町壽男（しもまちひさお）
しもまっちハイスクール
数楽・共育コンシェルジュ
白百合学園非常勤講師

1 ウズベキスタンでの教育活動の中で見たこと

- ・ウズベキスタンの子どもたちはなぜあんなに幸せそうなのか
- ・日本型教育って何だろう

2 数学とICT

- ・教育の情報化の功罪
- ・私のささやかな実践

3 つながる数学

- ・小中高大の接続・社会での活用・教科間でも連携

4 オマケ 私のささやかな well-being Math.





1 ウズベキスタンでの教育活動の中で見えたこと

砂漠化

綿花が
主要産業

シルクロード
の交差点

首都
タシケント



1991年
に独立

教育はフィンラン
ドと日本から学べ



ミルジョエフ大統領

イスラム教
だが緩やか

ブハラ州カラクル市か
らのオファー（2022
年）

タシケントとサマルカ
ンドからのオファー
（2024年）

親日。おしんと
ナルトは皆知っ
ている

いきなりウズベキスタ
ン派遣というモモが流
れてきた

いがねばな
るめじゃ

もも

かとうタキ
本名しもまちこ



ウズベキスタンが生んだ3人の偉大な科学者



アル＝フワーリズミー
800 ?

2次方程式の幾何的解法。アルジェブラ（代数）、アルゴリズムの語源。ルネサンス、産業革命にまで影響を与えた重要人物。



イブンスウィナー
980～1037

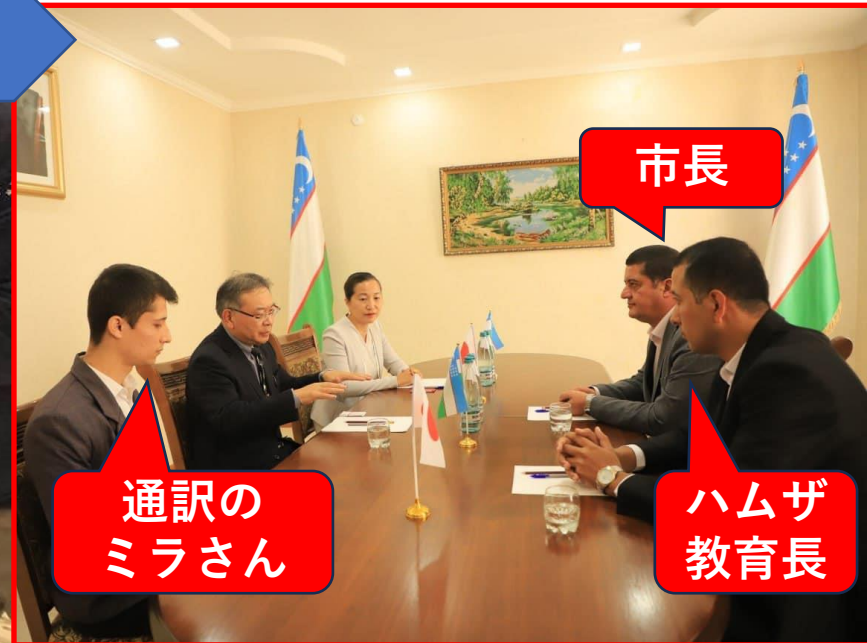
哲学者・医者・科学者である。「第二のアリストテレス」とも呼ばれ、イスラム世界が生み出した最高の知識人であり当時の世界の大学者と評価された人物である。数論の研究も多く残している。



ウルクベク
1394- 1449

大規模な天文台を作り天文観測を行い1年を365日6時間10分8秒と計算した。またアルmageストの三角比の表を再計算し制度を分析した。彼の行った計算は、当時の世界の研究水準をはるかに凌駕していたといわれる。

人々の対応



市長

通訳の
ミラさん

ハムザ
教育長

家族の絆



親日



熱烈歓迎



おもてなし精神

おもてなしはんぱない



挨拶の習慣



ギバーな人たち



踊りや詩吟の文化



学校・生徒・教員・授業の様子

教師の強いコントロール



積極的に発言する

目がキラキラしている



女の子はみんなオシャレ

黒板が小さい



教える内容が多い

インセンティブ型教育



ワールドカフェってスゴイ！

議論好き

教科指導と人間教育は同時に行うべきか

一人の迷える生徒にどう対応するか

私たちの授業はこれでいいのか

主要科目とは何か



年配者を敬う文化



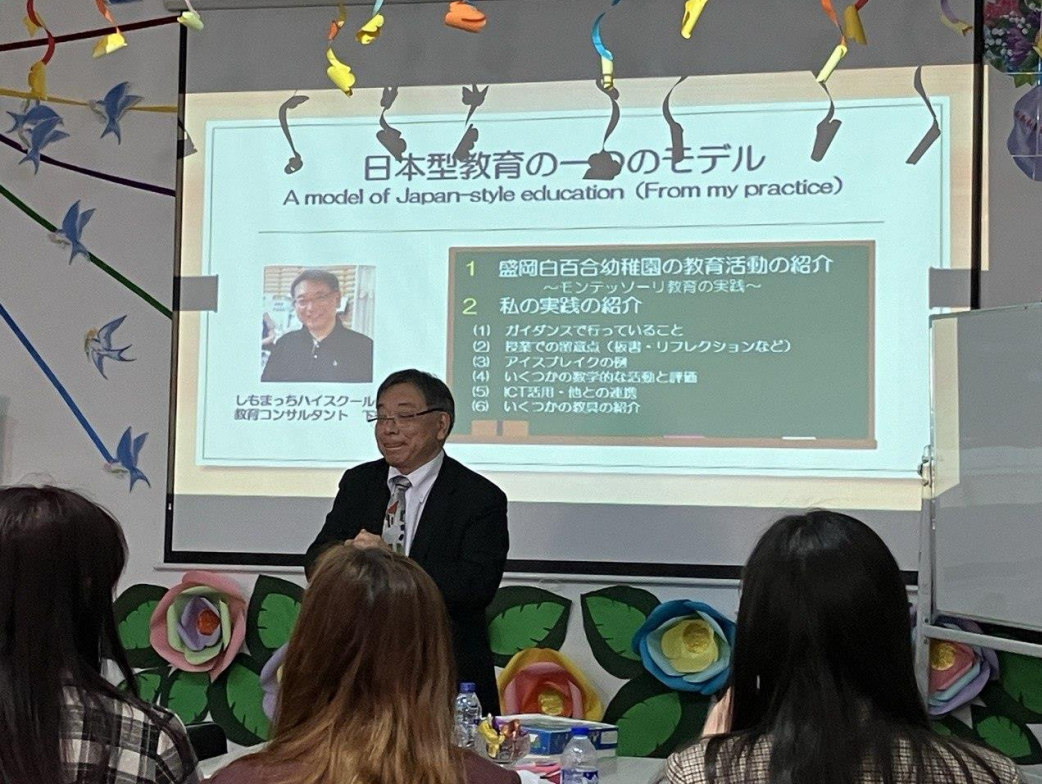




Woman's Day







数学科教員研修

机がない。ノートをとらない

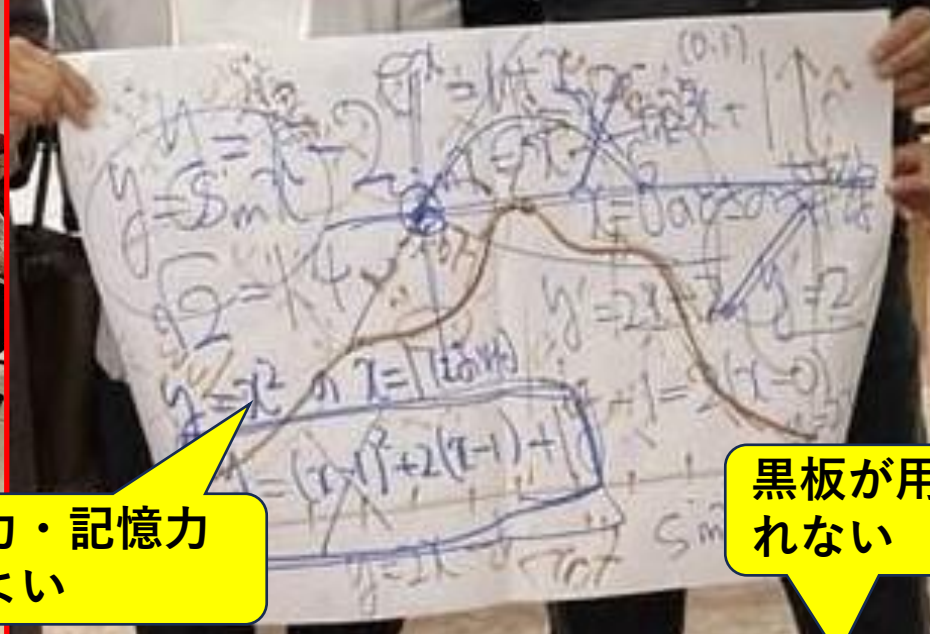


意欲的で前のめりで聴講



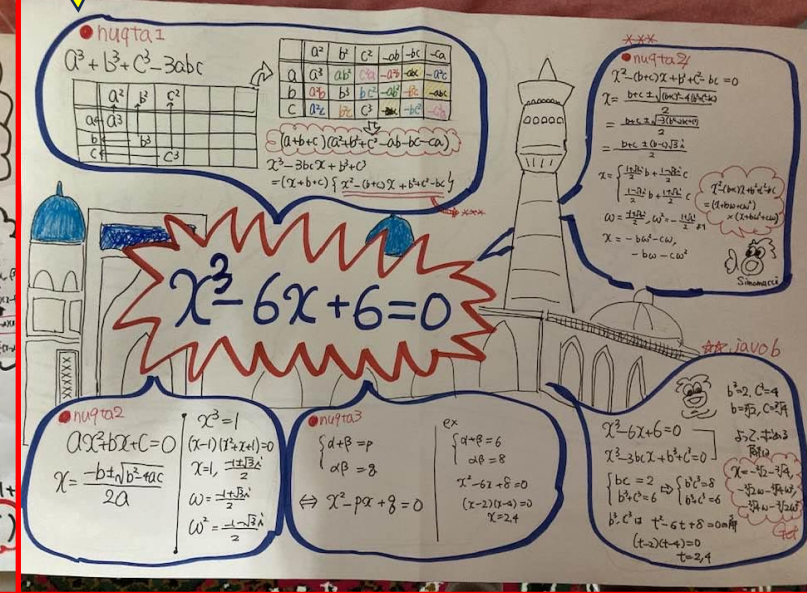
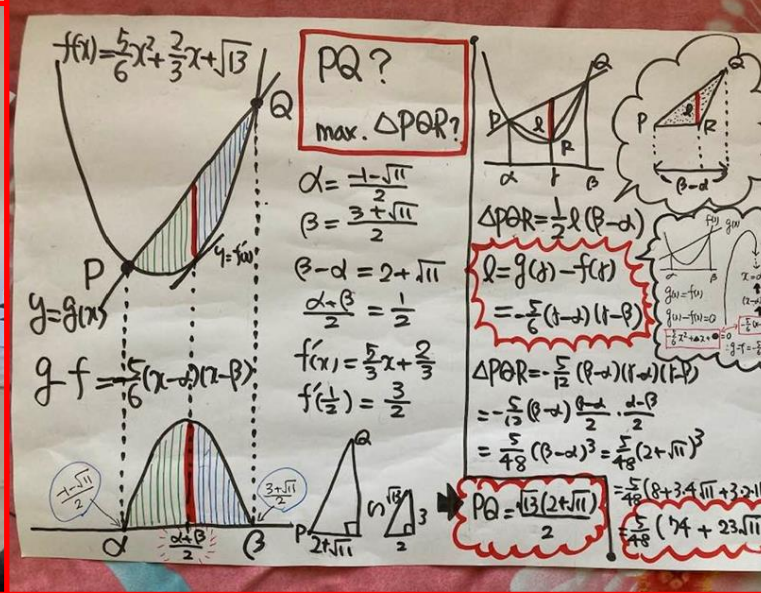
失敗を恐れず発言する

視力・記憶力がよい

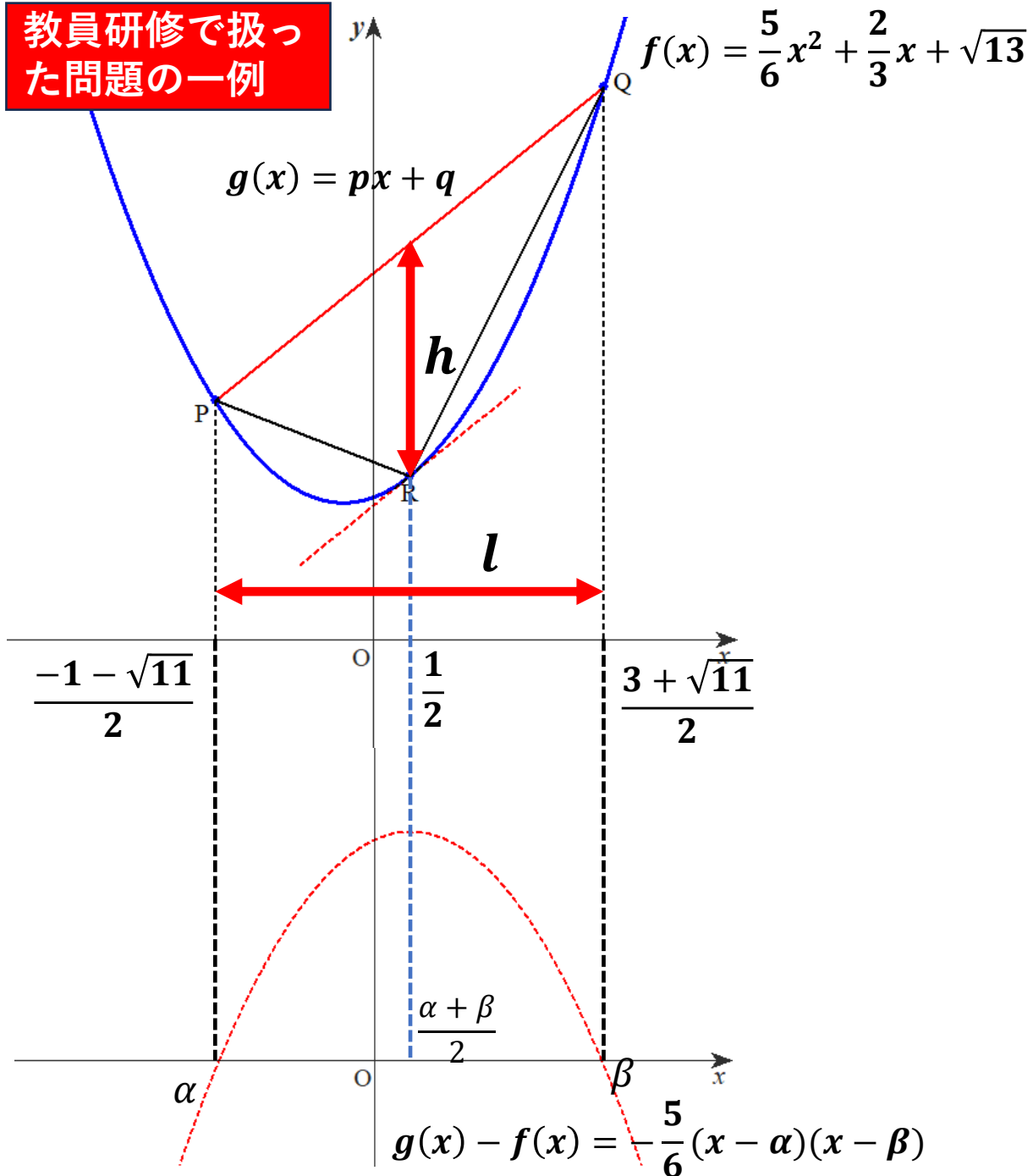


黒板が用意されない

突然依頼が舞い込む



教員研修で扱った問題の一例



△PQRの最大値を求めよ。

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}, \beta = \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \text{ とおく}$$

$$g(x) - f(x) = -\frac{5}{6}(x - \alpha)(x - \beta)$$

△PQRが最大になる時のRの x 座標を γ とすると

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1 - \sqrt{11}}{2} + \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

△PQRの面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \left\{ -\frac{5}{6}(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \right\}$$

$$S = -\frac{5}{12}(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ とすると}$$

$$S = -\frac{5}{12}(\alpha - \beta) \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{5}{48}(\beta - \alpha)^3$$

$$\beta - \alpha = \frac{3 + \sqrt{11} + 1 + \sqrt{11}}{2} = 2 + \sqrt{11}$$

中高生（9年～11年）の授業の様子



授業後はサイン、握手、写真ぜめ



先生がしゃしゃり出る

笑顔で前向き



チャイムがない。
計画は変更される



授業後に自発的に
感想を述べる



拍手が起こるなど
反応がよい

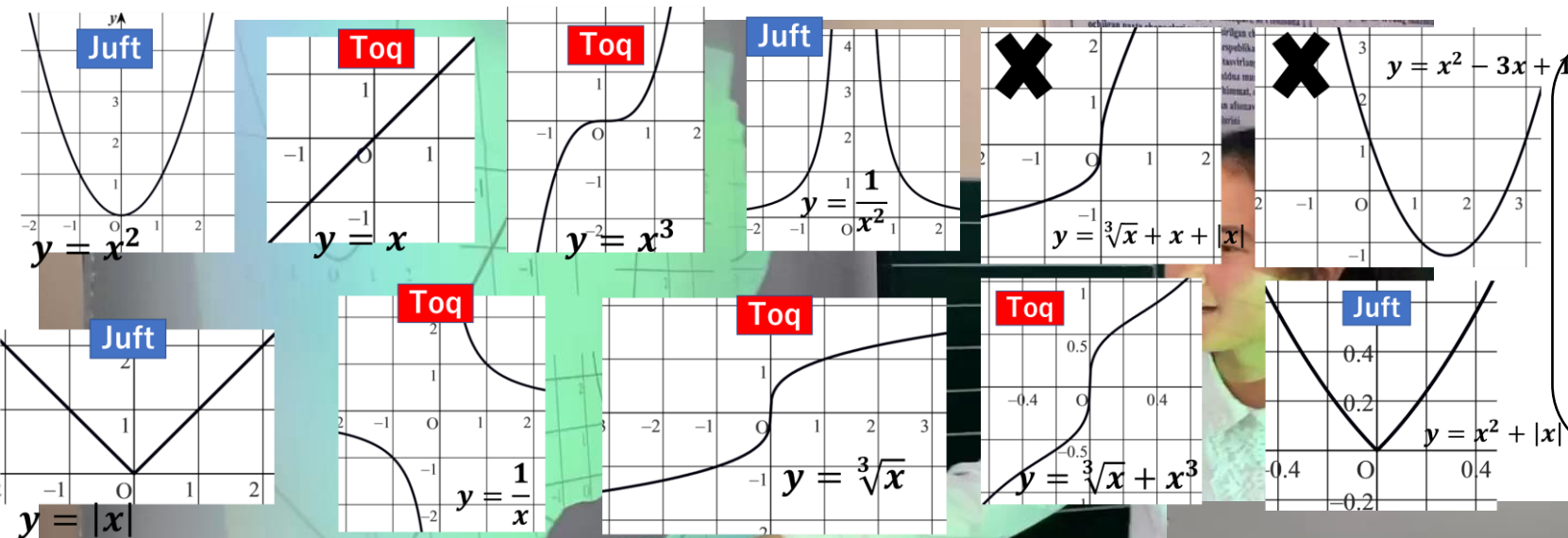
板書をノートに
とる習慣がない



全体的に非常に
熱心

授業風景（動画）9年生～11年生

教科書9年



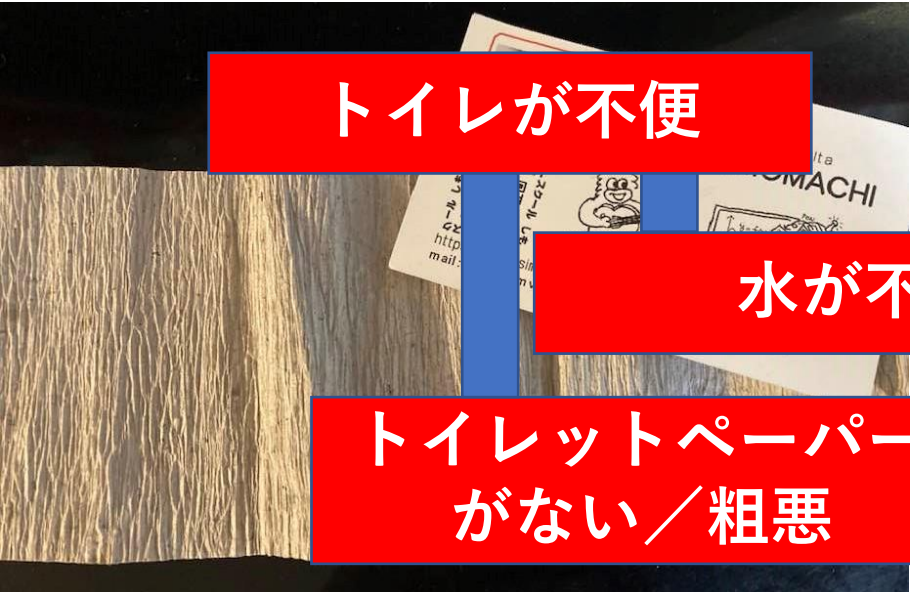
10年生の授業。2次関数について活動を中心とする授業を展開した。活動への参加の意欲が高い。発展的に考えたり、探究的に考えるという部分は弱いかもしれない。

9年生の授業。代数の教科書にある偶関数・奇関数に関する内容について授業して欲しいと前日の夜に言われる。日本では数Ⅲの内容になる。ウズベキスタンの教科書は多くの内容が網羅されているが、系統性や論証より物量の詰め込みを感じる。



15-IDUM

ウズベキスタンに3週間住んで感じたこと



トイレが不便

冷蔵庫がない／ぬるい

給与や年金を気にする

水が不便

冷たい水や氷がない

トイレットペーパー
がない／粗悪

料理が脂っぽい

チャイかコーラを飲む



しばしば停電がある

中央集権的

大統領の言葉・政策が徹底浸透

黒板が小さい

計画や予定がころころ変わる

ホワイトボードがない
／機能していない

時間・約束・計画にこだわらない

インセンティブと
ゼロトレランス

チャイムがない

ウズベキスタンに3週間住んで感じたこと

学校でも道端でもすれ違う子どもたちが必ず挨拶をする

失敗を恐れず発言する

1人で食事する人はいない

食事の前後でお祈り

教師も子どもも明るく
ポジティブ

誰かの誕生日がいつ
も行われている

互助の文化がある

自分や母国への信頼感

家族や年寄りを大切にする

副業している教師も多い

女の子はおしゃれ

メガネをかけている人が少ない

ホスピタリティ溢れる
おもてなしがハンパない

記憶力が良い。詩や故
事成語を唱える

水や紙を大切に使う

報酬・人事などで積極
的に評価

ウズベキスタンと日本の違いを考える

日本

ウズベキスタン

GDPが高い・生活が便利で快適 ← — — — — — → GDPが低い・生活が不便

平均寿命 84.3



平均寿命 73.0

- 得意なのは、組織化・計画・準備・コントロール
- 効率重視によるマスプロ授業
(多様性を排除・能力別編成)
- 同調圧力・正解主義・恥を嫌う
- 自尊感情が低い
- 生徒は部活動や人間関係確保のため疲弊
- 教師も多忙化やストレスにより疲弊

- 計画はつねに上書きされる
- 時間はあまり気にしない
- 恥をかくことを恐れず前に踏み出す
- イスラムの教えがベースに根付いている
(一人で食事しない・寄付の文化)
- 教師は自由に副業している
- おもてなし大好きなGiver

ウズベキスタンの人々はなぜ幸せそうなのか

幸せの4因子（前野隆司氏）

難問にチャレンジするのが好き

手を挙げてどんどん発言する

失敗しても気にしない

つねにニコニコ笑顔

いい話には拍手や歓声を送る

授業後に感謝の言葉を述べる

自分の良いところがわかっている

やってみよう

なんとかなる

ありのままに

ありがとう

自己実現と成長の因子

前向きと樂觀の因子

独立とあなたらしさの因子

つながりと感謝の因子

主観的幸福度が高い

教育の使命は国の課題を解決すること→国の課題は幸福度を上げること
→ならば教育のミッションは幸福度をあげること

デジタル化が進む

学びの個別化が進む

個々の
目的達成

孤人化

人間関係力の喪失
社会的知性の欠乏
心身の健康に不安

学校は個別最適化に応じたカリキュラム編成とともに、「Well-being・幸せ」を基盤に据えたグランドデザイン

独立とあなたらしさの因子

自己実現と成功の因子

ありのままに

やってみよう

ありがとう

なんとかなる

前向きと楽観の因子

つながりと感謝の因子

個々の教師が健康で
幸せであること

国の課題解決

Social Capital・
寛容性の向上

幸福度の向上・幸せな長
寿国のロールモデルへ

Before

ウェルビーイングを基本に据えたマネジメント・カリキュラム作成

子どもたちに、幸せな人生、幸せな未来を切り開いて欲しい。

一致

社会に出て学び続ける力になる。自らつかんだ知識は永続し、転移する。

大学など、あらたな学びの場で進んだ学びを行うベースを身につける。

主体的に学ぶ力を身につけさせたい。
協働で学ぶことの価値を知って欲しい。

生徒の進路実現を責任を持ってしっかり後押しする。深くて確かな学びを行い力をつける。

対立

めだかの学校視点
しもまちこ



一方的な教師の支配は罪悪。教え込みじゃなくて、子どもたちの活動を促して、楽しい学びを提供するべきよ。

対立のその先を掘り下げると共有できる世界が見える

すずめの学校視点
しもまにこふ



それは寝言。しっかりテストで結果を出せる学力をつけるべき。保護者も生徒もそれを望んでいる。

After

ウェルビーイングを基本に据えたマネジメント・カリキュラム作成



子どもたちに、幸せな人生、幸せな未来を切り開いて欲しい。



幸せってどんな状態なのか、まずは科学的に理解しておきましょう。



この先の未来がどうなるか、働き方がどう変わるかを教師も学ばなきゃ。



育てたい生徒像を共有し、幸せの4因子・PERMA・SPIREなどを取り入れた学校のグランドデザインを策定し授業改善へ



できなかった生徒も、ありのままの良さを認めつつ、対話を続けたら、自分に自信を持ったみたい。とても感謝されたわ。

僕がニコニコ幸せ状態で授業やったら、生徒の「やってやろう」「なんとかなる」精神が爆上がり！



数学におけるウェルビーイング教育とは？



時間があったら最後に私のささやかな実践を話すわね

2 「日本型教育」って何だろう

注目される日本型教育

即戦力の技術者を育てる高等専門学校制度

モンゴルやタイで『KOSEN』が導入されている

日本の幼稚園教育がカナダで人気（キンダーキッズの展開）

PISA「科学リテラシー」「数学的リテラシー」の成績優秀国

ベトナムや中東国で「読み書き算盤」が取り入れられる

「生きる力」を柱にした全人教育

サウジアラビアでは、日本の道徳教育をモデルに、全ての小・中・高でモラル教育を導入

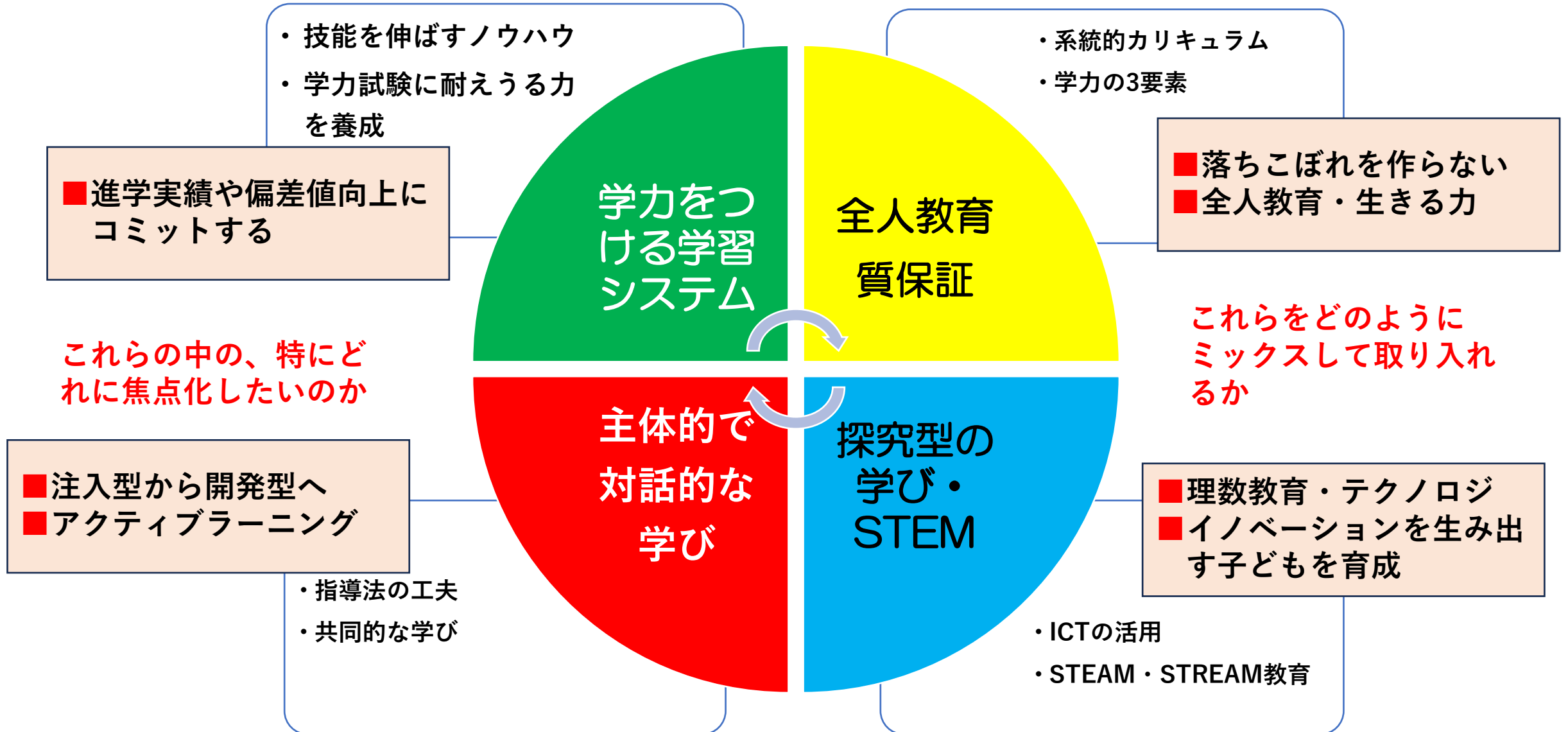
エジプトでは、学級会や掃除、日直などの特別活動を中心とした日本型教育を採用する小学校が増加

教育法整備。学習指導要領による系統的指導体制と質保証

エジプトは、2016年に日本と「教育パートナーシップ」を締結。日本型教育の導入や、日本と協力した教員・指導者の能力向上などについての事業を実施。

筑波大学のマレーシア海外分校の設立に向け、日本政府はマレーシア政府と政府間協力覚書に署名。

望まれる「日本型教育」とは何か



令和の答申

- 「言語活動」「活用」を強調した学習指導要領改訂 (2008)

- アクティブラーニングに関する中教審答申 (2012)

- 学習指導要領改定でALはフェイドアウト。「主体的で対話的で深い学び」に変化 (2017)

令和の答申

- Society5.0
- withコロナ
- GIGAスクール
- 教育DX

- 【「令和の日本型学校教育」の構築を目指して】 (2022)
「個別最適化の学び」「協働的な学び」(主体的で対話的で深い学びを補完・発展させた)

これまでの日本の教育

全人教育
(質保証・知徳体を
一体で育む)

学校教育の中で自立した
学習者を育てていない
(コロナ禍で露呈)

諸外国から評価

言われたことを言われた
通りにできる。みんなが
同じことをする。
(正解主義・同調圧力)

継承

克服

「個別最適化の学び」と「協働的な学び」の両輪を提起

日本型教育はどう相対化されるか

数研出版
「チャート式数学 I」
1980年版

目 次

第1章 数 と 式

1 単項式・多項式	10	5 最大公約数・最小公倍数	28
2 整式の乗法	13	6 分数式の計算	33
3 整式の除法	18	7 平方根の計算	45
4 因数分解	21	8 集合と演算	55

第2章 方程式・不等式

9 複素数	59	15 高次方程式	93
10 逆, 必要条件と十分条件	63	16 連立方程式	99
11 2次方程式	66	17 大小関係と1次不等式	106
12 解と係数の関係	70	18 2次不等式	108
13 恒等式	78	19 応用問題	117
14 因数定理	83		

第3章 命題, 証明, 整数

20 命題と証明	124	22 整数の問題	140
21 等式・不等式の証明	129		

第4章 2次関数と写像

23 1次関数とグラフ	149	26 2次関数のグラフと方程式	168
24 2次関数のグラフ	154	27 写像と関数	176
25 2次関数の最大・最小	159	28 変換・図形の移動	186

第5章 いろいろな関数

29 分数関数とグラフ	194	31 指数関数	205
30 無理関数とグラフ	201	32 対数関数	209

< 9 >

第6章 三角関数

33 三角比	227	36 三角関数の取り扱い	246
34 一般角と三角関数	233	37 三角形と三角関数	255
35 三角関数の性質	236	38 三角形の面積	263

第7章 ベクトル

39 ベクトルと有向線分	269	41 ベクトルの応用	281
40 ベクトルの成分	274		

第8章 図形と方程式

42 点, 距離	299	46 軌跡	330
43 直線の図形	303	47 不等式と領域	339
44 円, 円と直線	313	48 条件つき最大・最小	346
45 だ円・双曲線	326	49 図形の性質と計算	351

第9章 確 率

50 場合の数	360	54 確率の加法定理	381
51 順列	364	55 確率の乗法定理	386
52 組合せ	371	56 確率のいろいろな問題	397
53 確率の意味	378		

第10章 集 合 と 論 理

57 集合	403	59 命題の合成と真理表	422
58 条件と合成	412		
練習の略解			425
索引			522

2 数学教育とICT

ICT利活用

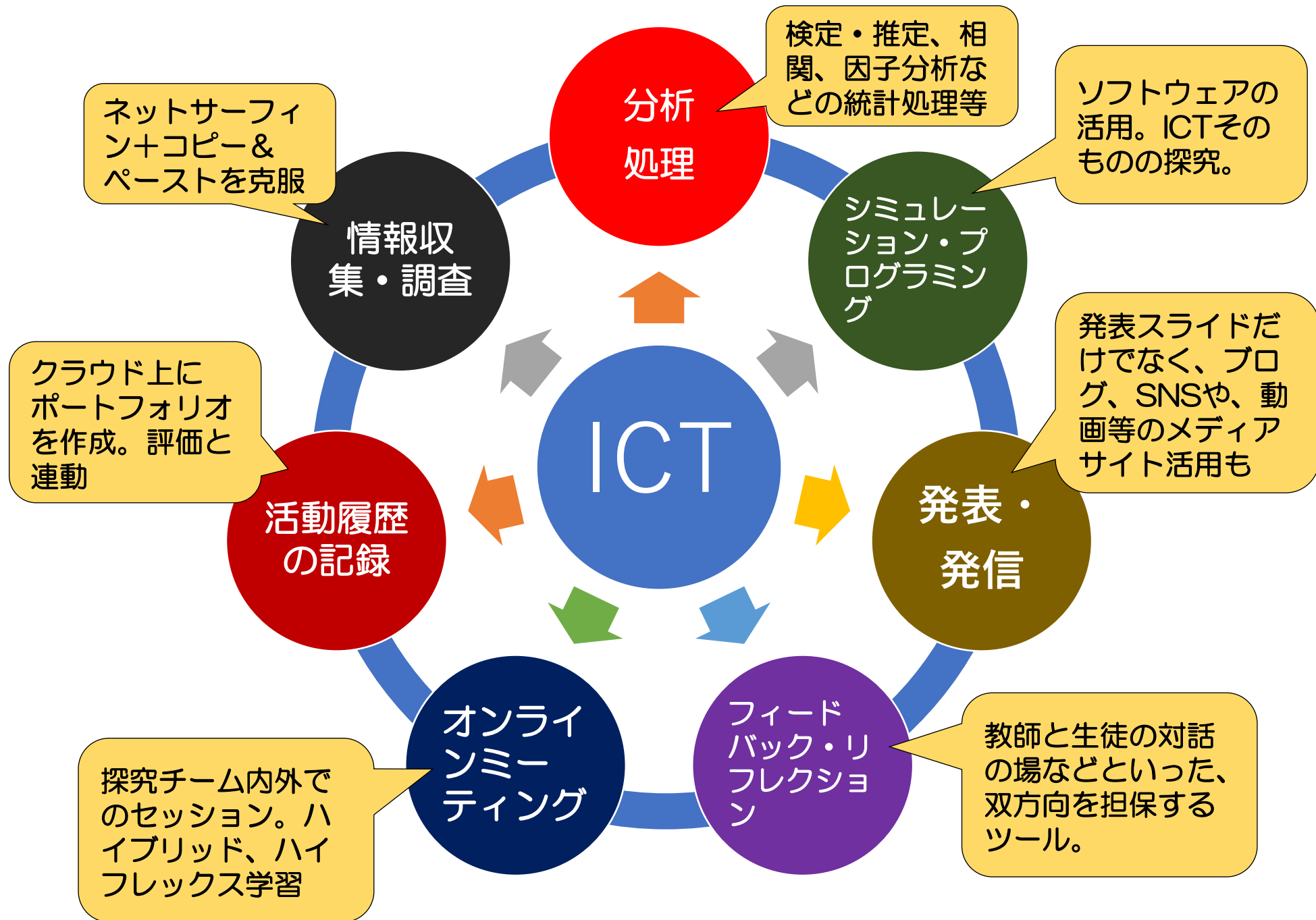
昔は・・・

- プレゼンテーション
(デジタル教科書)
- グラフィックスの効果
- 数学アプリ・動く教材
- オンデマンド教材

個別最適な学び



協働的学び





しもまちハイスクール

ホーム ブログ 職員室 講義室 図書室 数学動画視聴室 美術室 家庭科室 音楽室

しもまち貸しますプロジェクト しもまちハイスクール 幸せ関連 盛岡白百合学園学び応援ページ 教科通信

SUN WAY



「学校の中の私」から「私の中の学校へ」

学ぶ楽しさを見つけると、すべての答は自分の中に既にあることに気づきます。
「しもまちハイスクール」は屋号でありコンテンツでありそして「私の理想の学校」でもあります。更にそれを突きつめて言えば、私自身といってもいいのかもしれない。



しもまちハイスクールのコンセプト

しもまちからのメッセージを読む

実は今、生徒はインディペンデント学習しています。

ミニミニ講座

こちらでは授業の補足動画をあげています。授業の復習として、また、部活動などでの公欠やコロナ対応などで授業を受けられなかった生徒のためのオンライン教材として活用してもらうことを目的にしています。3分～5分なので内容は薄いのですが、スキマ時間の活用や気分転換になればと思っています。どうぞ積極的に利用してくださいね。

■ 6月6日 中間テストの解説です。動画とPDFファイルがあります。



中1アドバンス中間テスト [1.0 MB]
中間考査の解説のPDFファイルです



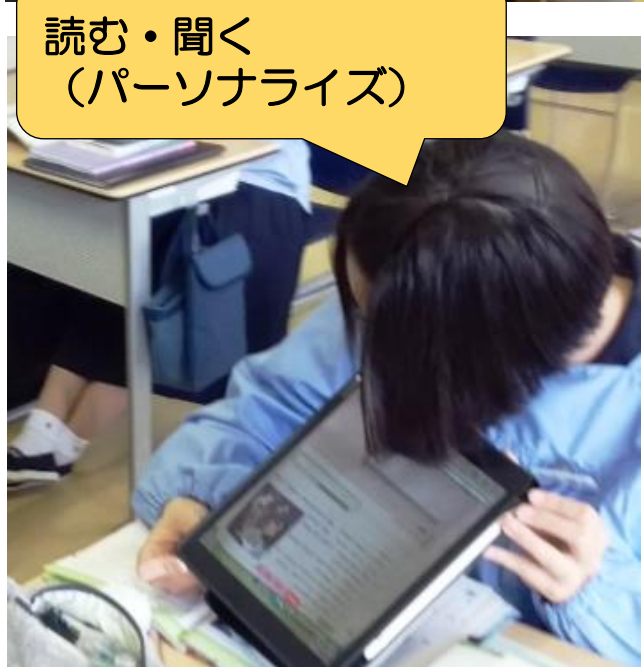
話す・聞く（プレゼンテーション）



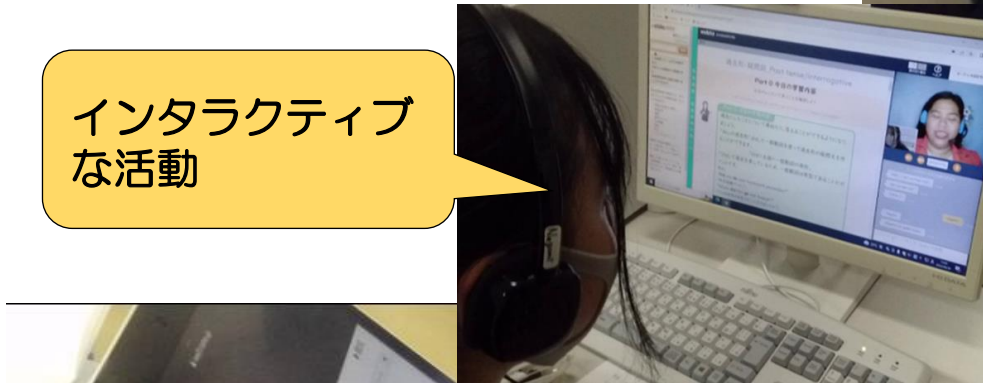
話す・聞く（ペアワーク）



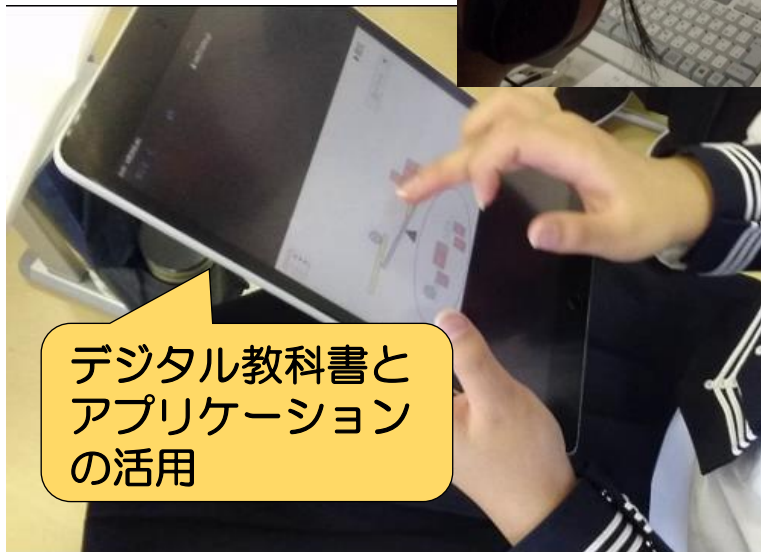
フィードバック



読む・聞く
（パーソナライズ）



インタラクティブ
な活動



デジタル教科書と
アプリケーション
の活用



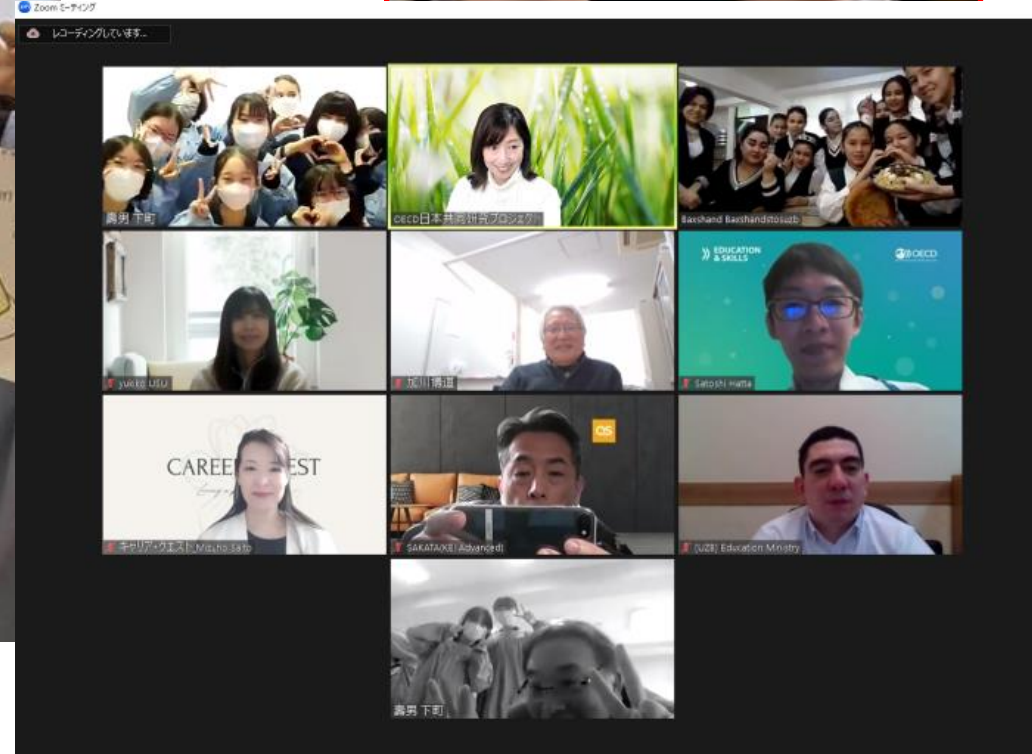
個別の学び

学び

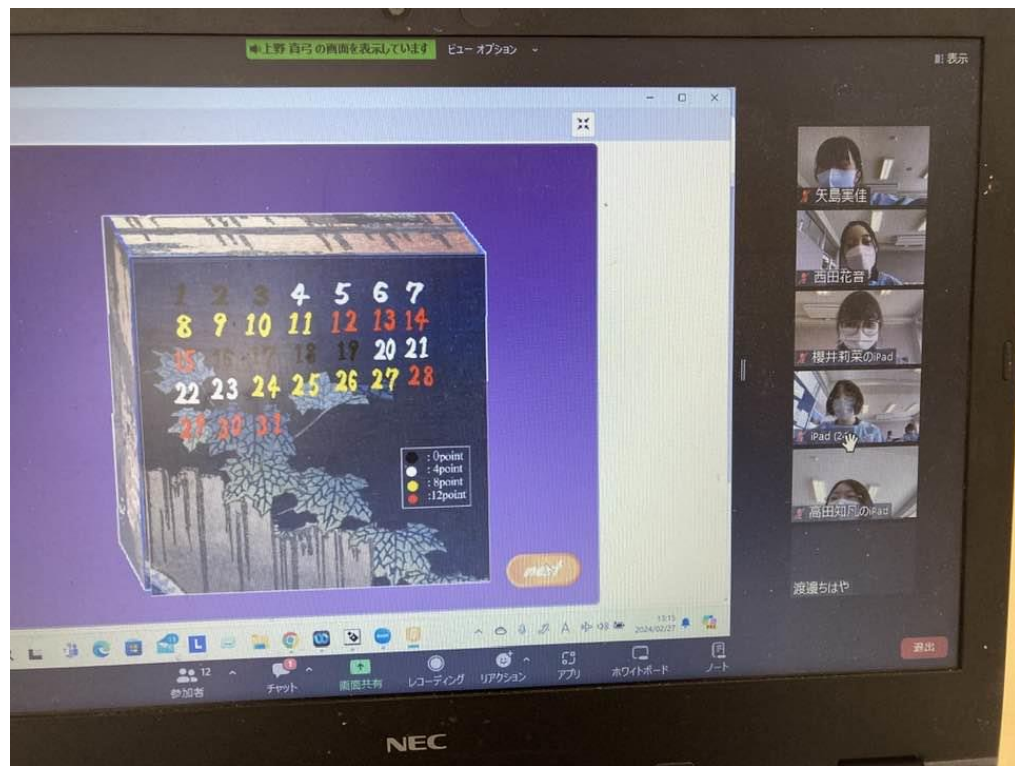
ウズベキスタンと交流①



ウズベキスタンと交流②



オンライン特別授業（目付字）



	三	二	一
1	0	0	1
2	0	0	2
3	0	0	3
4	0	1	0
5	0	1	1
6	0	1	2
7	0	1	3
8	0	2	0
9	0	2	1
10	0	2	2

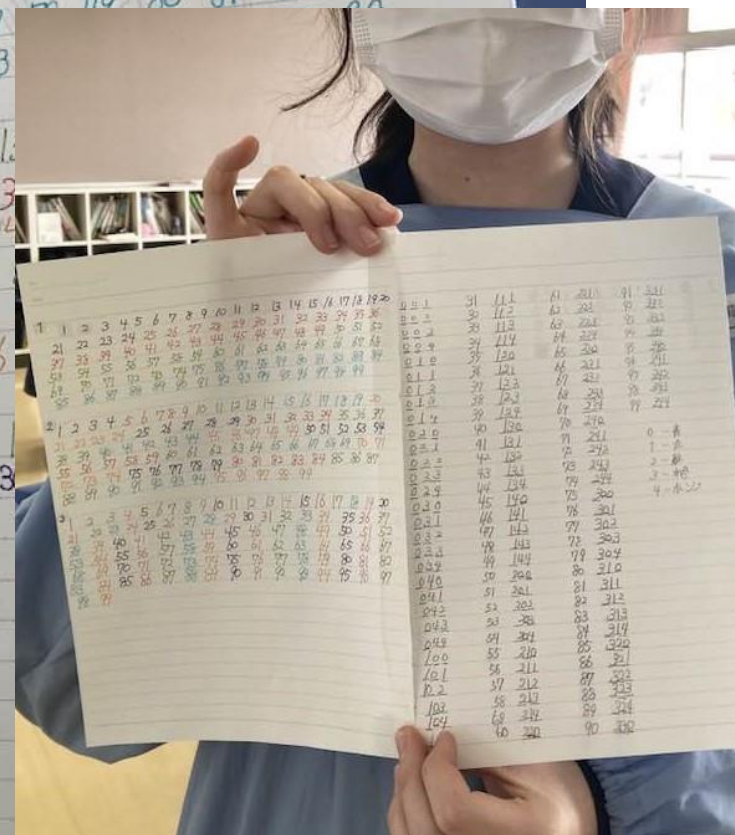
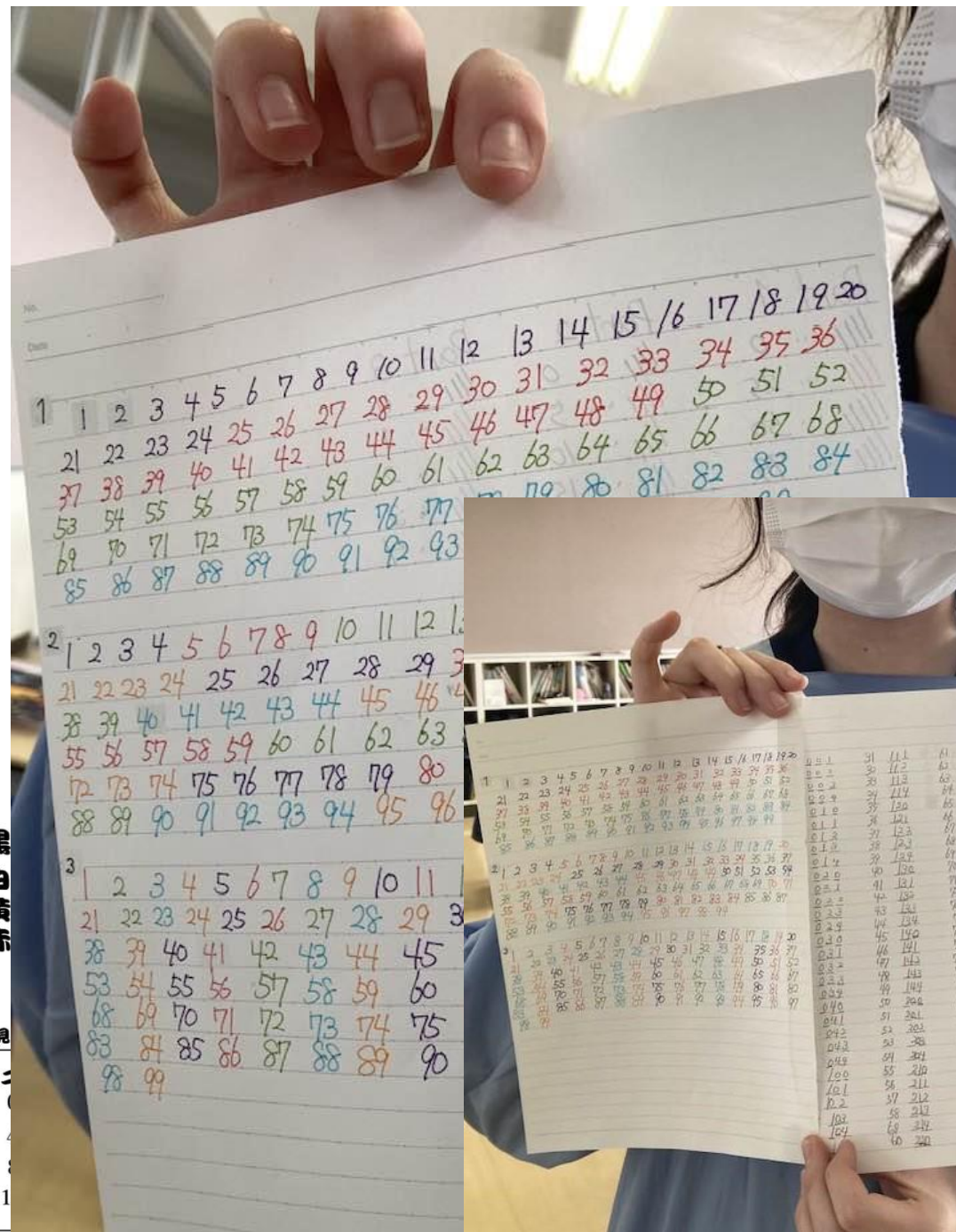
	三	二	一
11	0	2	3
12	0	3	0
13	0	3	1
14	0	3	2
15	0	3	3
16	1	0	0
17	1	0	1
18	1	0	2
19	1	0	3
20	1	1	0

	三	二	一
21	1	1	1
22	1	1	2
23	1	1	3
24	1	2	0
25	1	2	1
26	1	2	2
27	1	2	3
28	1	3	0
29	1	3	1
30	1	3	2
31	1	3	3

0 : 黒
1 : 白
2 : 黄
3 : 赤

2+8+16
=26
早見

● 0
○ 1
● 2
● 3



情報化の功罪

主体性・多様性・共同性を促進

社会的弱者がそのギャップを埋めるためのツール

個別最適な学びを加速する

生成AIを学びに取り入れ価値創造する。探究的学びが加速する。

オンデマンドとフィルターバブル

見たい情報しか見ない。提供されるコンテンツに支配され、価値観が固定される。偏見が強化される。

エンドユーザーたちの娯楽

使わなくてもよいことにも使う。トレンドを追いかける人どうしが、我こそはとアーリーアダプターよろしくコミュニティをつくって楽しんでいる。

現代において部分最適は課題の本質的解決につながらない

考えることの面白さを忘れる

私のささやかな実践より

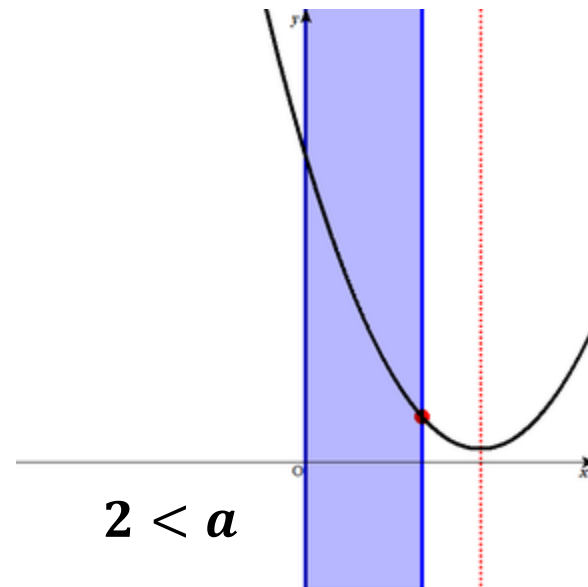
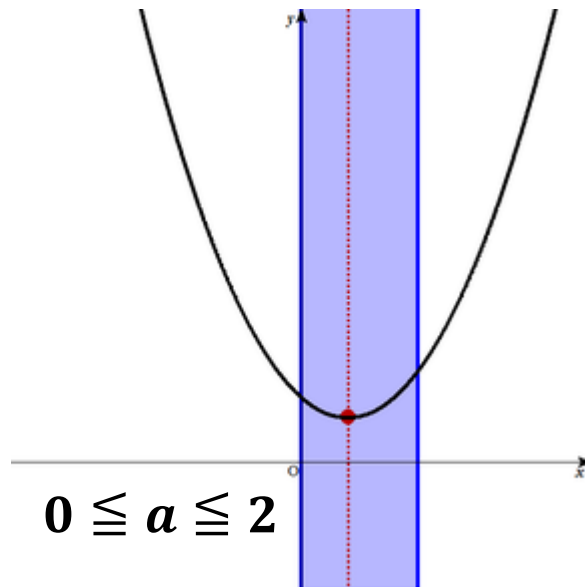
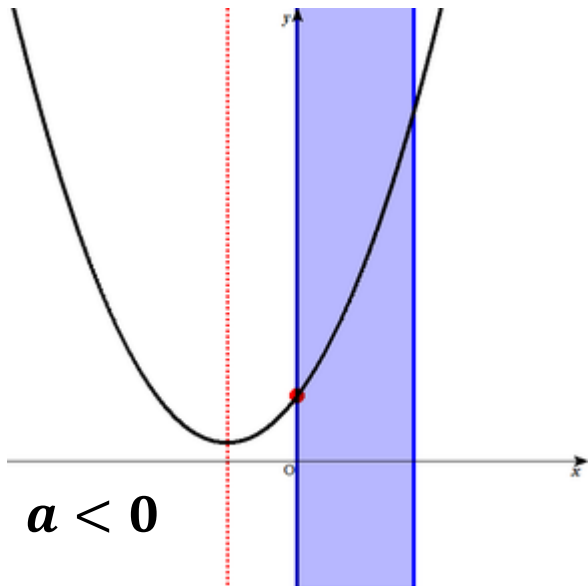
しもまちハイスクール 「イケオジ通信」 2021年11月30日の記事
「選択理論心理学」のイメージ より

二次関数 $y = x^2 - 2ax$ の $0 \leq x \leq 2$ における最小値を求めよ。

$$y = (x - a)^2 - a^2$$

軸の方程式は、直線 $x = a$

頂点の座標は、 $(a, -a^2)$



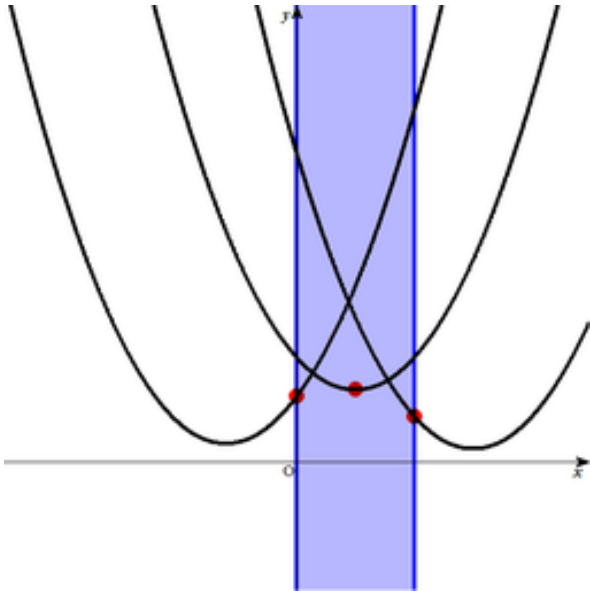
しもまちハイスクール 「イケオジ通信」 2021年11月30日の記事
「選択理論心理学」のイメージ より

二次関数 $y = x^2 - 2ax$ の $0 \leq x \leq 2$ における最小値を求めよ。

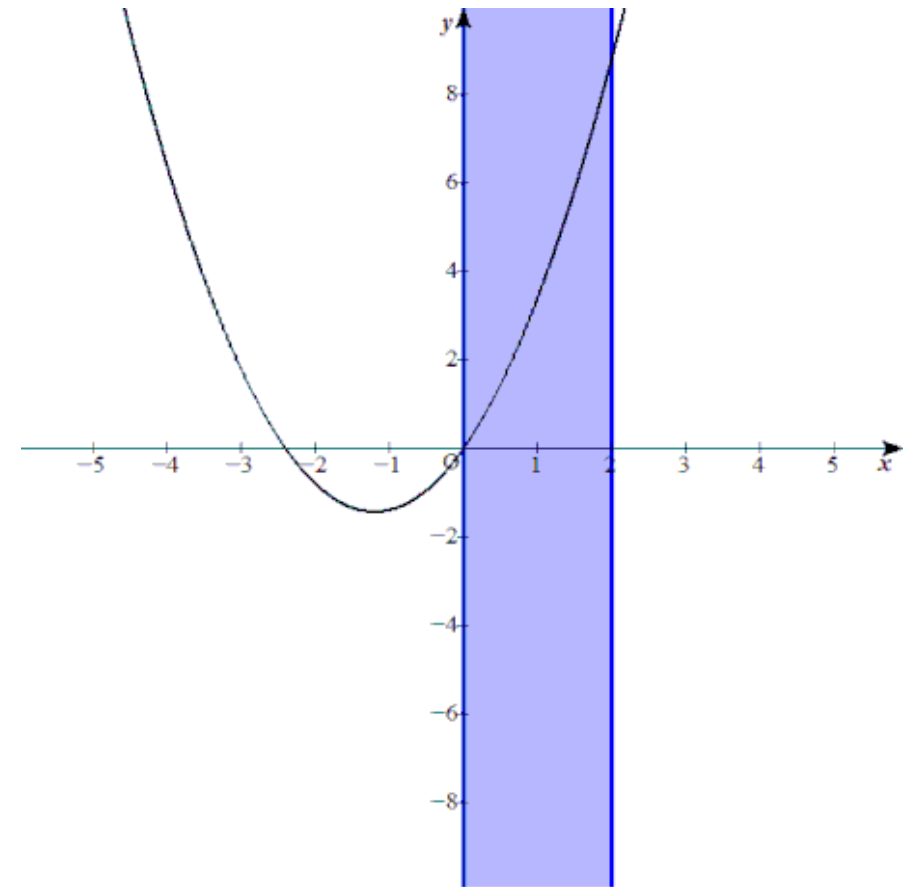
$$y = (x - a)^2 - a^2$$

軸の方程式は、直線 $x = a$

頂点の座標は、 $(a, -a^2)$



- I $a < 0$ のとき
最小値は $x = 0$ のとき
最小値は $y = 0$
- II $0 \leq a \leq 2$ のとき
最小値は $x = a$ のとき
最小値は $y = -a^2$
- III $2 < a$ のとき
最小値は $x = 2$ のとき
最小値は $y = 4 - 4a$



$p = -6$ に固定したまま、 q の値だけ変化させる。

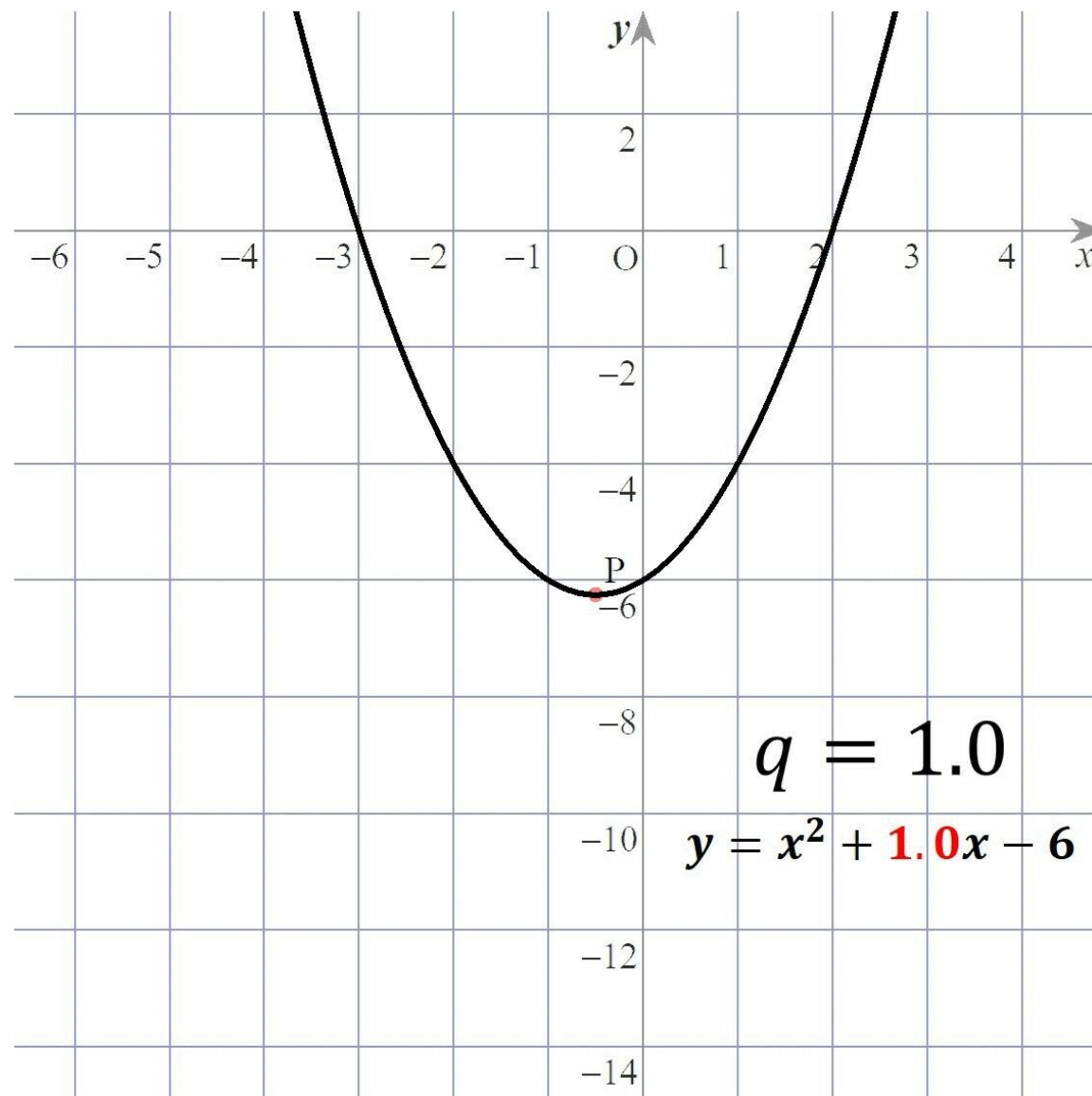
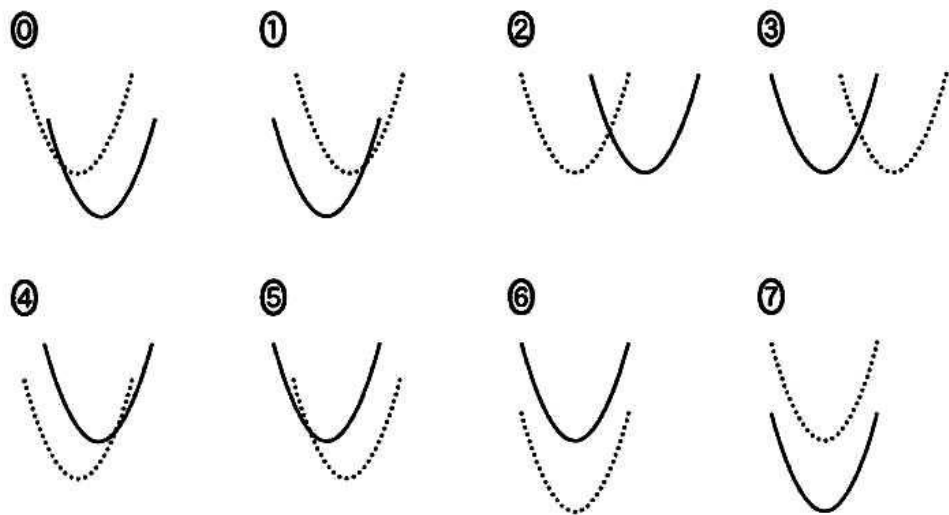
$$y = x^2 - 6x + q \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$y = x^2 + qx - 6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

の二つのグラフについて、 $q = 1$ のときのグラフを点線で、 q の値を 1 から増加させたときのグラフを实践でそれぞれ表す。

このとき、③のグラフの移動の様子を示すと となり、

④のグラフの移動の様子を示すと となる。



$p = -6$ に固定したまま, q の値だけ変化させる。

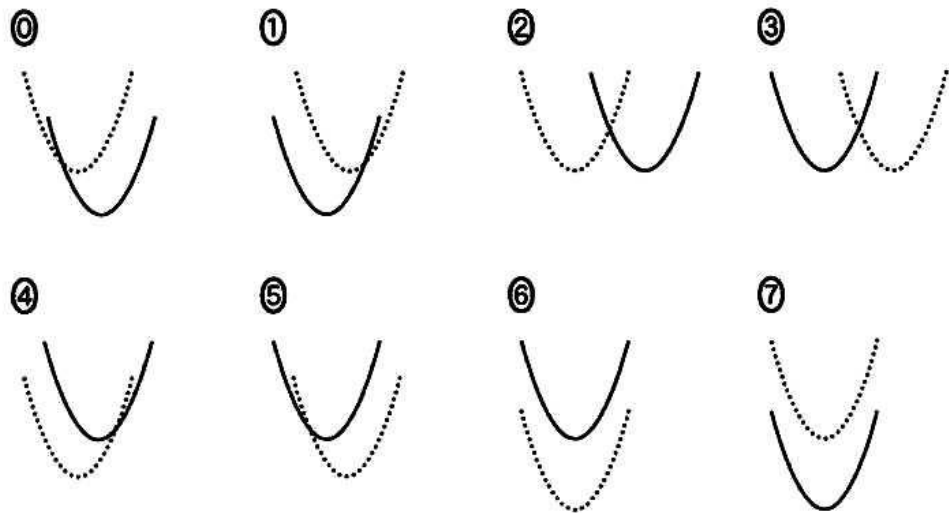
$$y = x^2 - 6x + q \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$y = x^2 + qx - 6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

の二つのグラフについて, $q=1$ のときのグラフを点線で,
 q の値を 1 から増加させたときのグラフを実践でそれぞれ表す。

このとき, ③のグラフの移動の様子を示すと となり,

④のグラフの移動の様子を示すと となる。



$$y = x^2 + qx - 6$$

$$y = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}q^2 - 6$$

軸の方程式は直線 $x = -\frac{q}{2}$

頂点の座標は $\left(-\frac{1}{2}q, -\frac{1}{4}q^2 - 6\right)$

定点 $(0, -6)$
を通る

区間における
最大最小問題

頂点の軌跡が
放物線

今日の目標「数学を探究的に学ぼう」

題材とする問題

発見的に

$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ

a の値を変えていくとグラフの何が変化するのか（何が変化しないのか）。それを言葉や式を使ってどのように表現できるか。

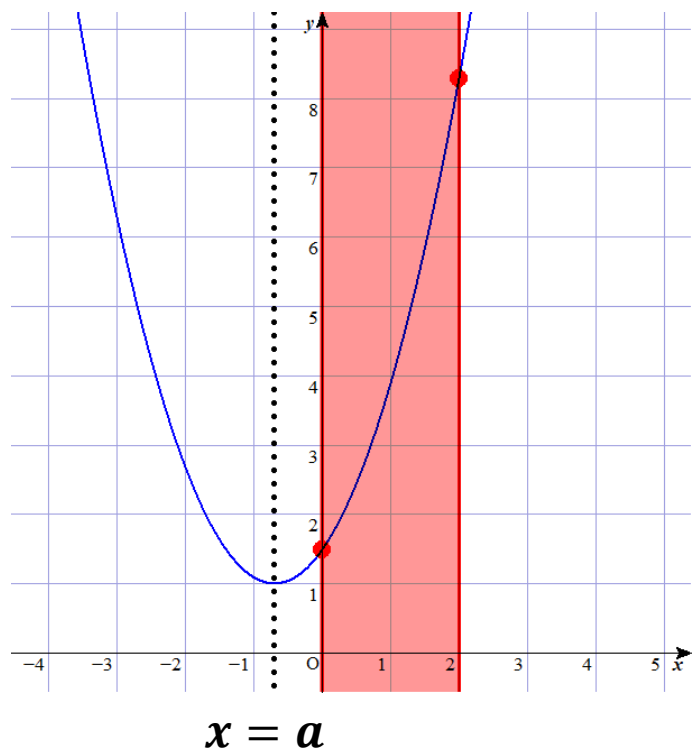
式の一部を少し変えることで、何が見えてくるか。新しい発見を得ることができるか。

何にフォーカスして見ればよいか。何を捨て去って考えた方がよいか。

$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ

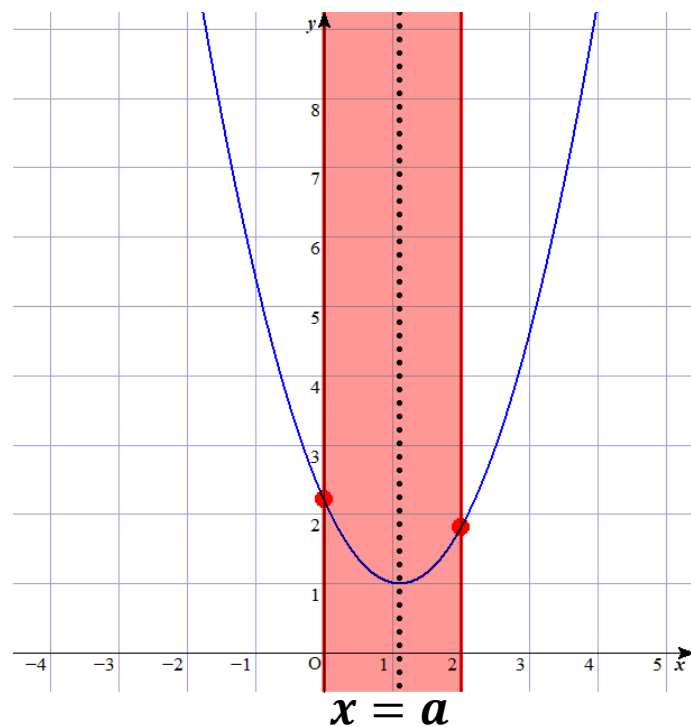
$y = (x - a)^2 + 1$ 頂点($a, 1$) 軸 直線 $x = a$

(1) $a < 0$ のとき



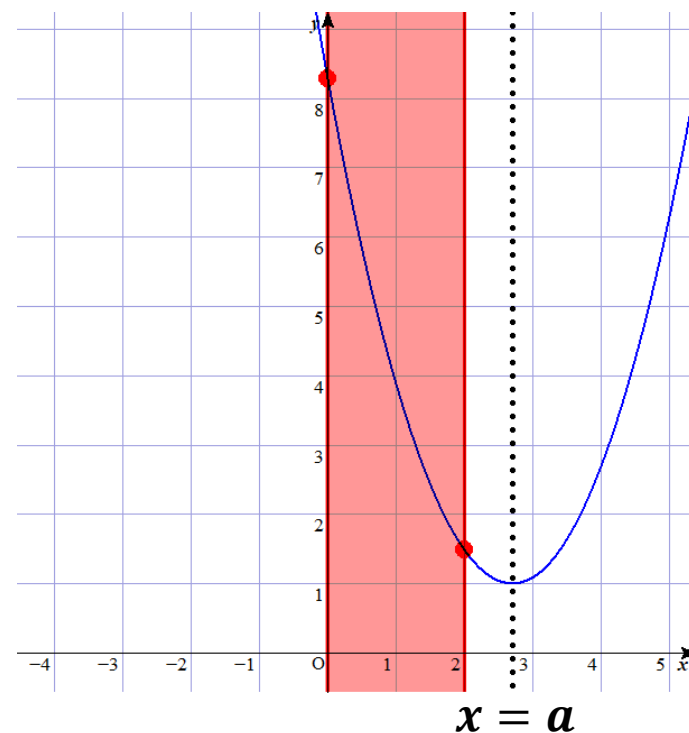
$x = 0$ のとき最小となり
最小値は $a^2 + 1$

(2) $0 \leq a \leq 2$ のとき



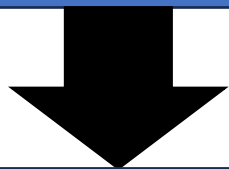
$x = a$ のとき最小となり
最小値は 1

(3) $2 < a$ のとき



$x = 2$ のとき最小となり
最小値は $a^2 - 4a + 5$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$$

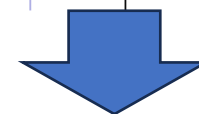
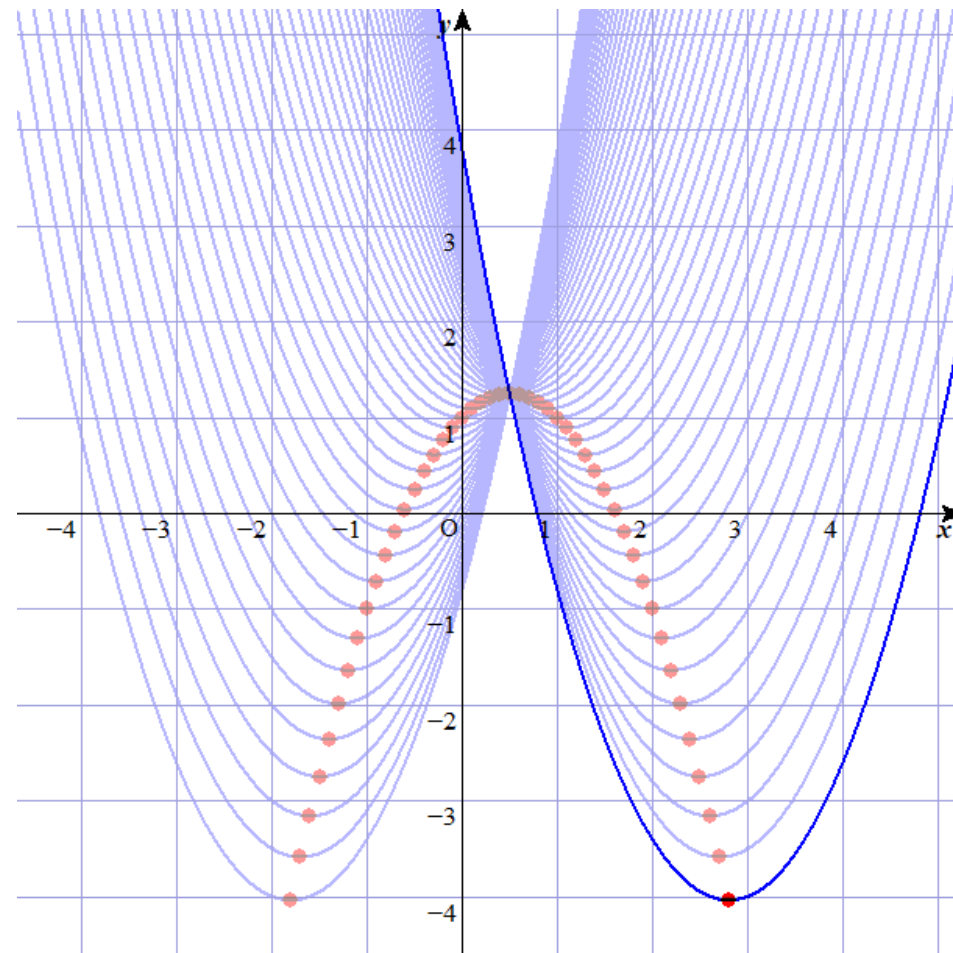


$$y = x^2 - 2ax + a + 1$$

ちょっとだけ
変えてみるよ



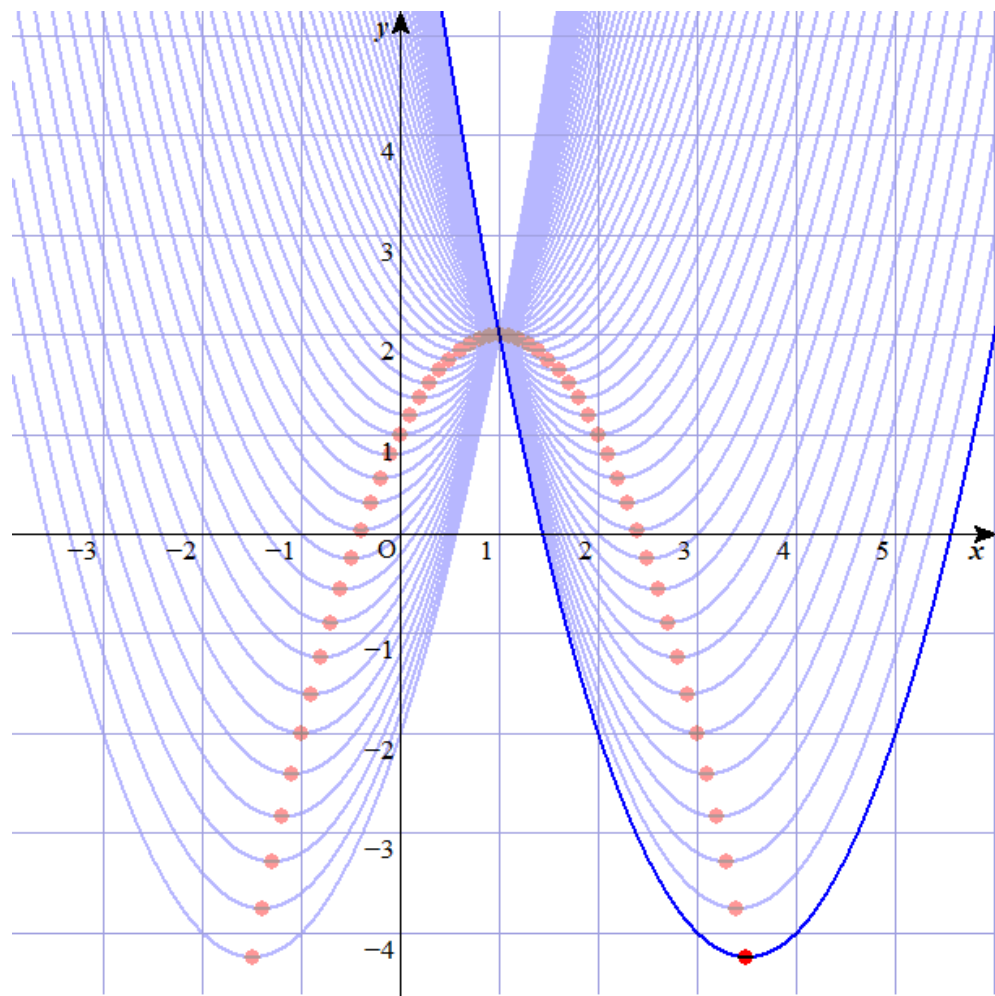
Grapes



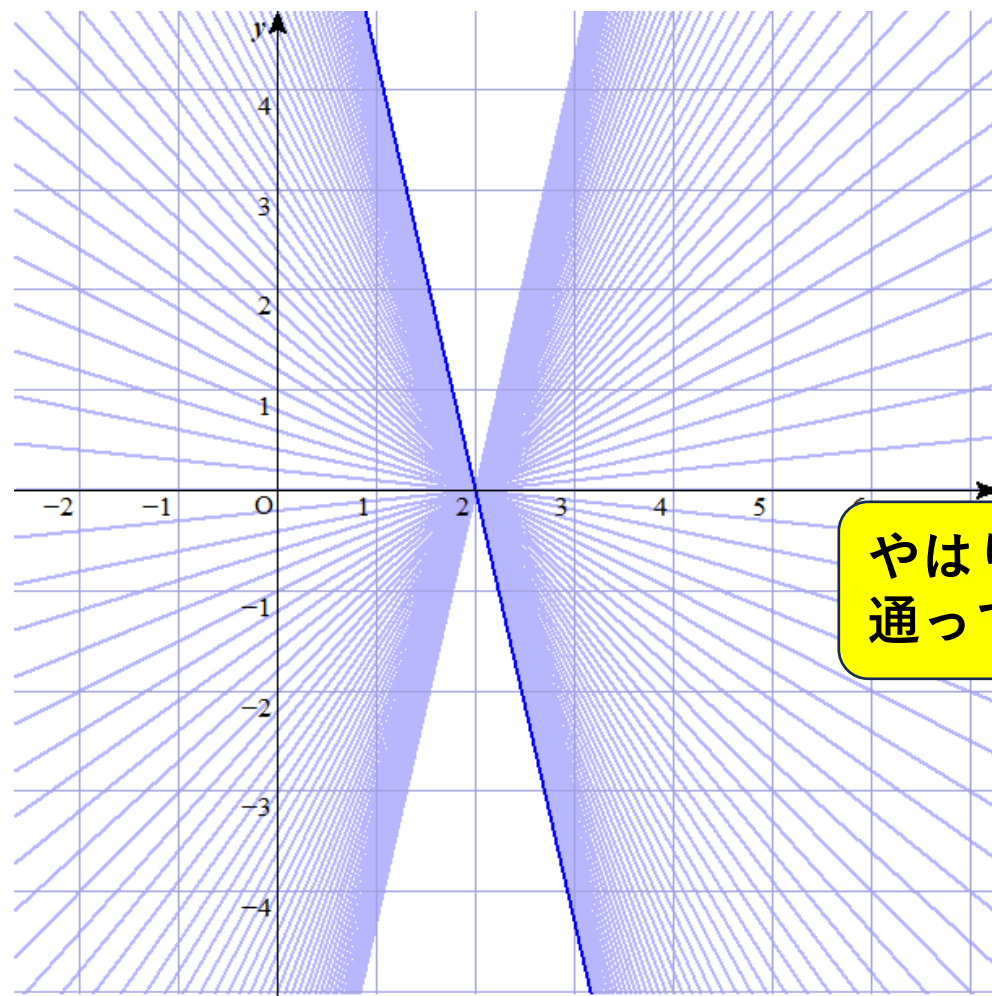
a の値によら
ず、定点を
通っているね



$$y = x^2 - 2ax + 2a + 1$$



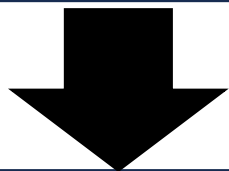
$$y = ax - 2a$$



やはり定点を
通っているね

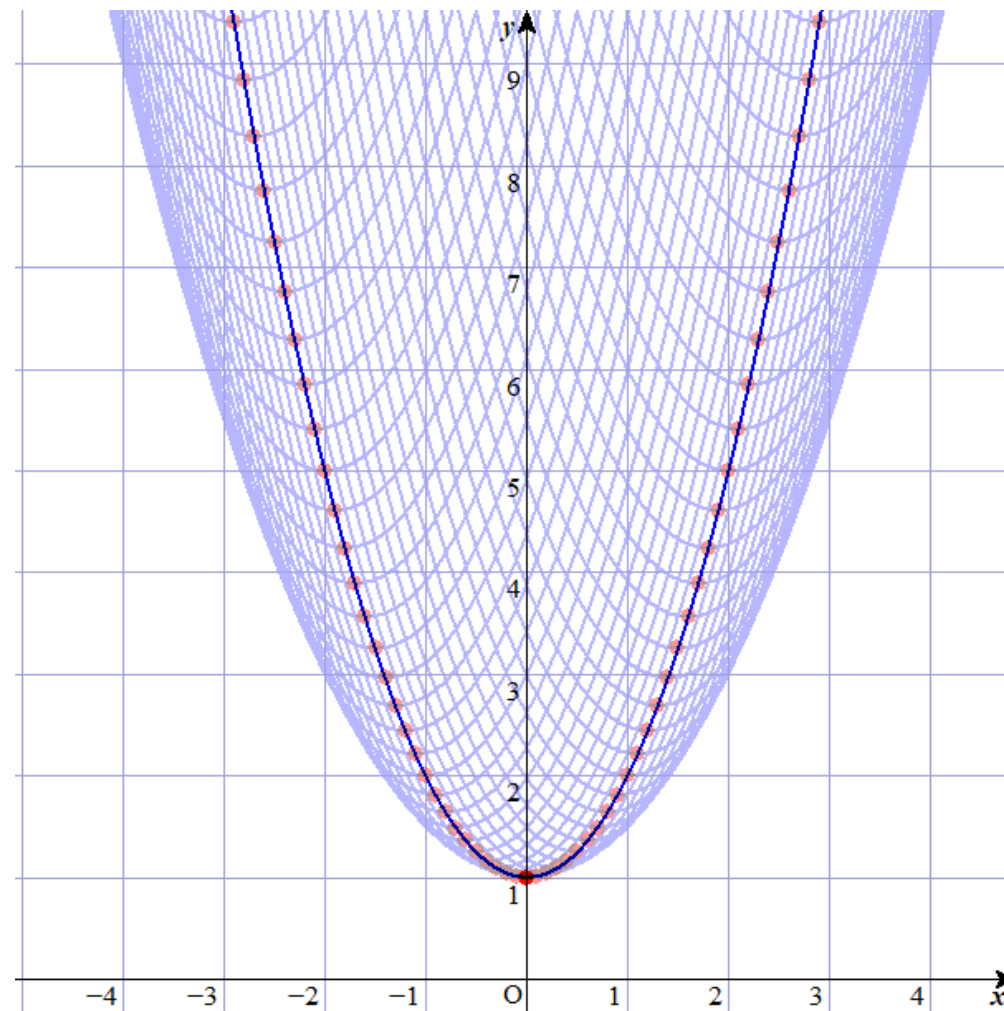


$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$$



$$y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$$

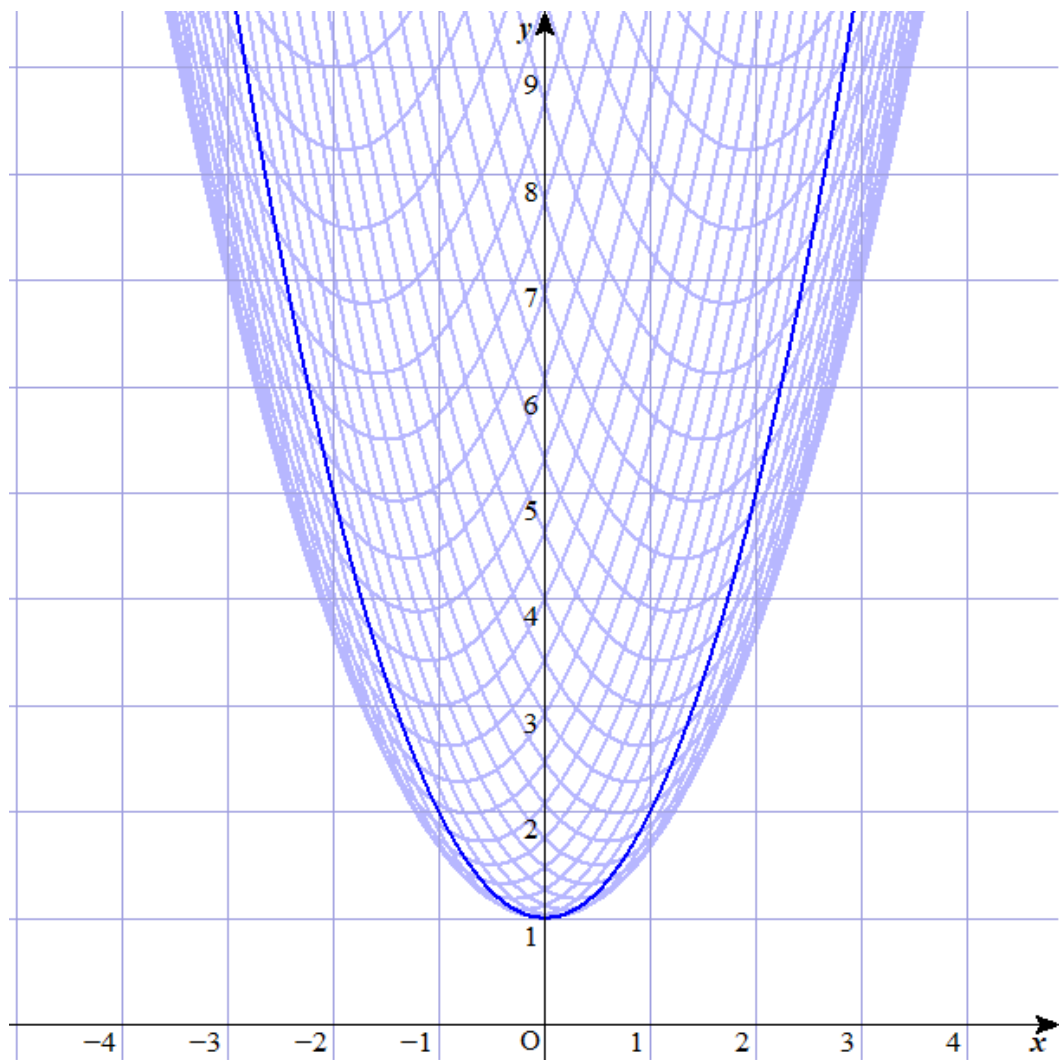
今度はこのように
変えてみよう



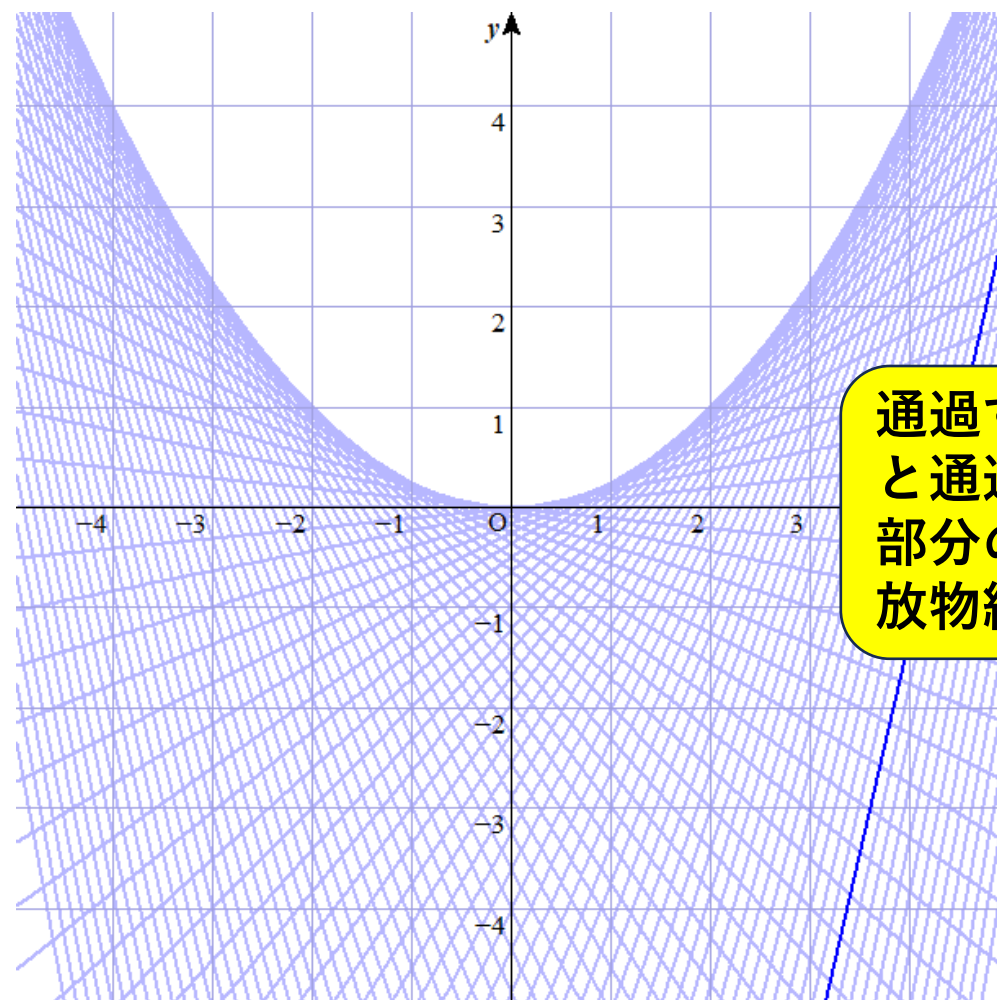
放物線が通過する部
分が放物線になって
いるね



$$y = x^2 - 2ax + 3a^2 + 1$$



$$y = ax - a^2$$



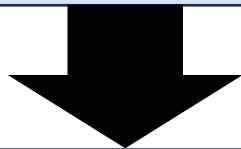
通過する部分
と通過しない
部分の境界が
放物線だ



文字定数が1次のとき

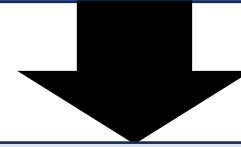


a の値によらず定点を通る

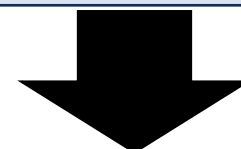


なぜそうなる？
その定点の座標は？

文字定数が2次のとき



a の値が変化すると、通過する領域と通過しない領域に分かれ、その境界が放物線になる



なぜそうなる？
その境界の放物線の式は？

なぜそうなる
のだろう。



文字定数を含んだ2次関数の最大最小

文字定数を含んだ2次関数の平方完成ができる

頂点と軸の方程式がわかる

定義域と軸の関係を理解し場合分けができる

GOAL

最大値と最小値を求めることができる

探究

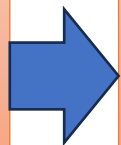
文字定数によってグラフがどう変化するか調べよう

ICTの活用

数学における合理的配慮といってもいいかも



OECD



DeSeCo計画 (Definition and Selection of Competencies)

1997年

2003年 キーコンピテンシーの定義

学力概念の
国際基準

- ① 社会に成果をもたらすこと
- ② 人生において成功する（質の高い人生を送る）こと



能力とは個人と社会の両者にとって価値や効果をもたらすものという前提に立っています

道具を相互作用的に用いる能力

- 言語・シンボル・テキストを相互作用的に用いる
- 知識や情報を相互作用的に用いる
- テクノロジーを相互作用的に用いる

異質な人々からなる集団で互いに関わりあう能力

- 他人と良い関係を作る
- 協力する
- 争いを処理し解決する

自律的に行動する能力

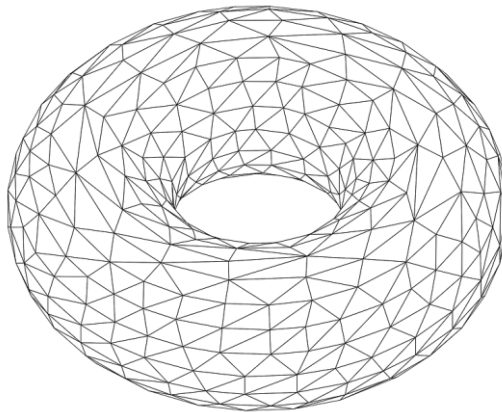
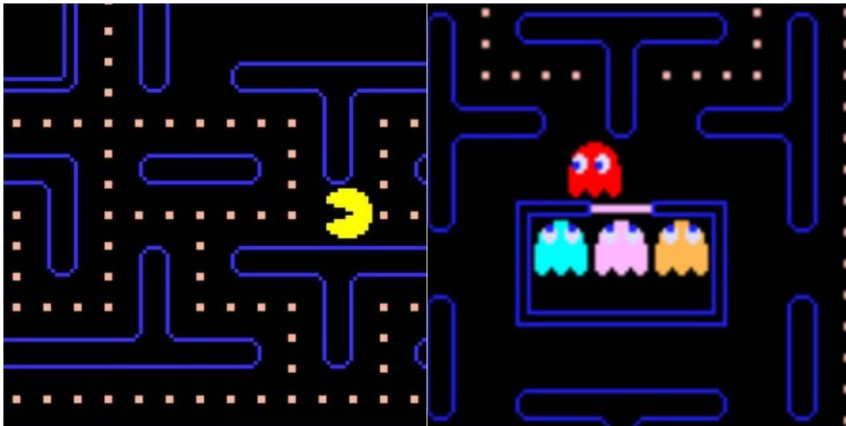
- 大きな展望の中で行動する
- 人生計画や個人的プロジェクトを設計し実行する
- 自分の権利、利害、限界、ニーズを守り主張する

この三者の中核に省察性（reflectivity：社会空間を乗り切る力、矛盾や差異に二者択一を越えて対処する力、責任を持つこと）という概念を置き、3つのコンピテンシーを相互関連させながら、自らの人生をナビゲートしていく

Math. Assisting Computer

MACとCAM (←私の造語)

Computer Assisting Math.



複素数の素数 (ガウスの整数における既約元)

ガウスの整数

$$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

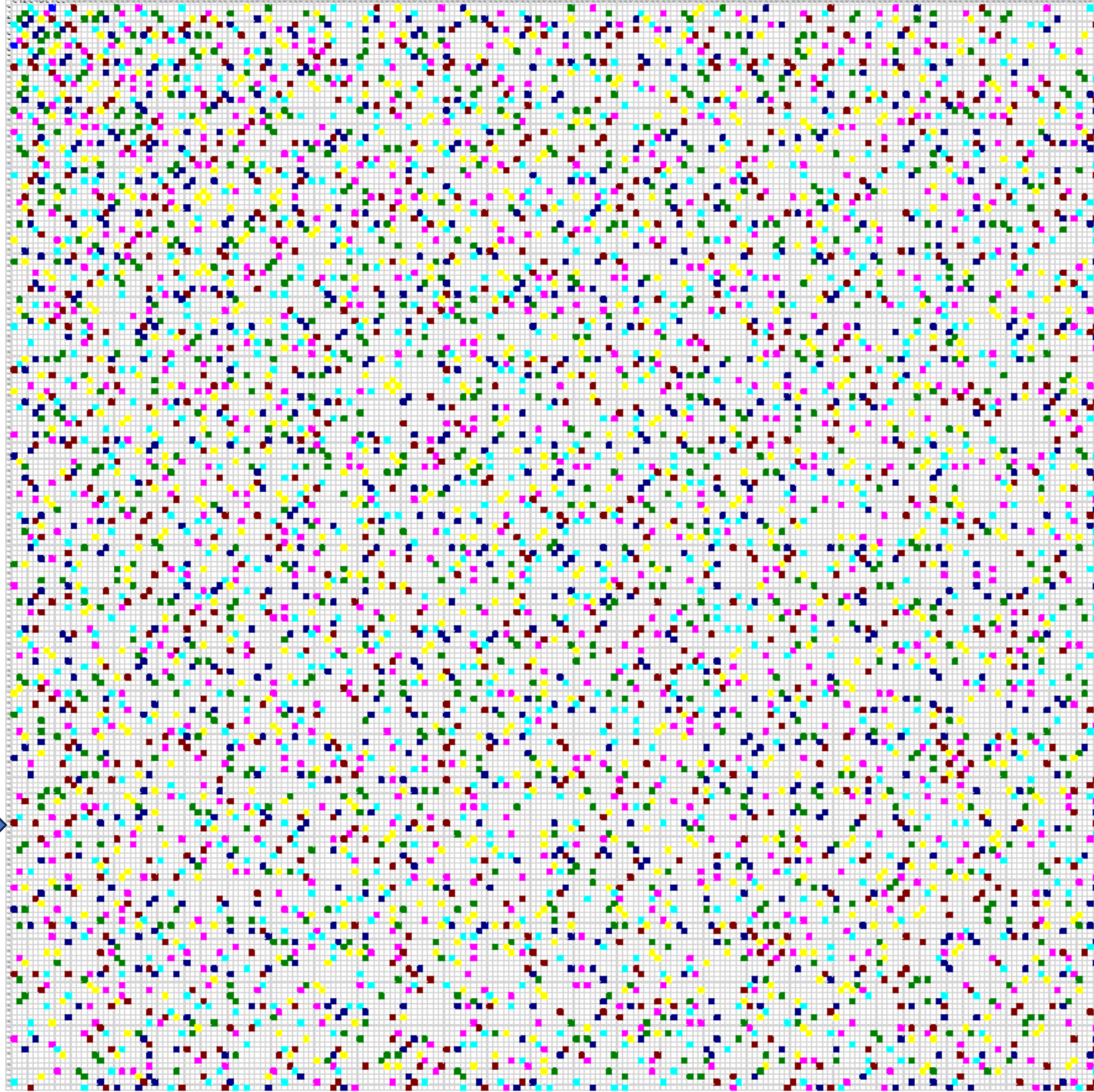
$$5 = (2 + i)(2 - i)$$

$$1 + 3i = (2 + i)(1 + i)$$

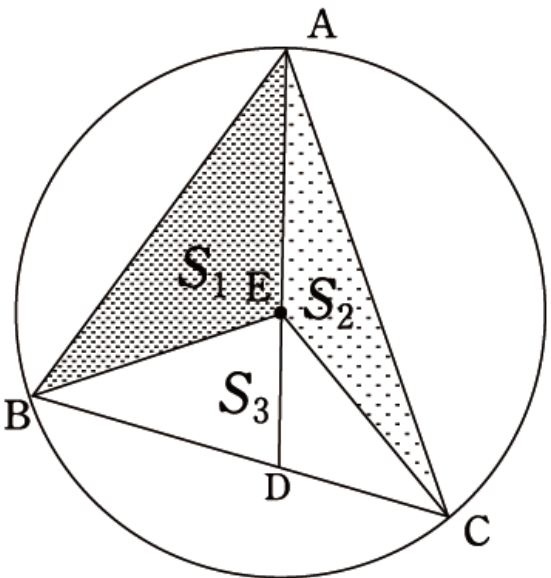
ガウスの整数上では
5は素数ではない。
 $1 + 3i$ も可約である



ガウスの整数における素数を
図示。ノルムを7の剰余に
よって色分け。



任意の三角形の外接円を図示する



BD: DC = S₁: S₂ より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{S_2 \overrightarrow{OB} + S_1 \overrightarrow{OC}}{S_1 + S_2}$$

AE: ED = (S₁+S₂): S₃ より

$$\overrightarrow{OE} = \frac{S_3 \overrightarrow{OA} + S_2 \overrightarrow{OB} + S_1 \overrightarrow{OC}}{S_1 + S_2 + S_3}$$

面積の公式より

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

	基本図	
A	(a, b)	3点の座標を決める
B	(c, d)	
C	(m, n)	
P	$(\sqrt{(A.x-B.x)^2+(A.y-B.y)^2}, 0)$	2点間の距離の公式で、3辺 AB, BC, CAの長さを求める。
Q	$(\sqrt{(B.x-C.x)^2+(B.y-C.y)^2}, 0)$	
R	$(\sqrt{(C.x-A.x)^2+(C.y-A.y)^2}, 0)$	
S	$(\frac{P.x^2+Q.x^2-R.x^2}{2P.xQ.x}, 0)$	余弦定理を使って、cosA, cosB, cosC の値を求める
T	$(\frac{Q.x^2+R.x^2-P.x^2}{2Q.xR.x}, 0)$	
U	$(\frac{R.x^2+P.x^2-Q.x^2}{2R.xP.x}, 0)$	
V	$(\sqrt{1-S.x^2}, 0)$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の公式を使って、sinA, sinB, sinC を求める。
D	$(\sqrt{1-T.x^2}, 0)$	
E	$(\sqrt{1-U.x^2}, 0)$	
F	(2S.xV.x, 0)	倍角の公式 sin2A=2sinAcosA などを使って、sin2A, sin2B, sin2C を求める。
G	(2T.xD.x, 0)	
H	(2U.xE.x, 0)	
I	$(\frac{G.x(C.x-A.x)+F.x(B.x-A.x)}{F.x+G.x+H.x}+A.x, \frac{G.x(C.y-A.y)+F.x(B.y-A.y)}{F.x+G.x+H.x})$	外心の成分表示
J	$(\frac{R.x}{2V.x}, 0)$	正弦定理を使って外接円の半径を求める。
K	(L.x, L.y), r=J.x	
L	$(\frac{P.xC.x+Q.xA.x+R.xB.x}{P.x+Q.x+R.x}, \frac{P.xC.y+Q.xA.y+R.xB.y}{P.x+Q.x+R.x})$	オマケ：内心と内接円の表示
M	$(J.x^2 \frac{F.x+G.x+H.x}{P.x+Q.x+R.x}, 0)$	
N	(L.x, L.y), r=M.x	

8桁電卓が教える数学

$\sqrt[3]{2}$ を求めてみよう。



$$\sqrt[3]{2} = 1.2599 \dots$$

$$\sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 1.05946 \dots$$

項	音	エッジからの距離	A_{n+1}/A_n
A_0	E	32.7	1.06
A_1	D#	34.6	1.06
A_2	D	36.7	1.06
A_3	C#	38.9	1.06
A_4	C	41.2	1.06
A_5	B	43.6	1.06
A_6	A#	46.3	1.06
A_7	A	49.1	1.06
A_8	G#	52.0	1.06
A_9	G	55.1	1.06
A_{10}	F#	58.4	1.06
A_{11}	F	61.9	1.06
A_{12}	E	65.6	

8桁電卓が教える数学

	キー操作	電卓表示値
①	$1 \times 2 \sqrt{\sqrt{}}$	1.189207
②	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2418577
③	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2553806
④	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2587843
⑤	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2596367
⑥	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2598499
⑦	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599032
⑧	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599165
⑨	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599198
⑩	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599207
⑪	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599207
⑫	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599209
⑬	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599209
⑭	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599209
⑮	$\times 2 = \sqrt{\sqrt{}}$	1.2599209

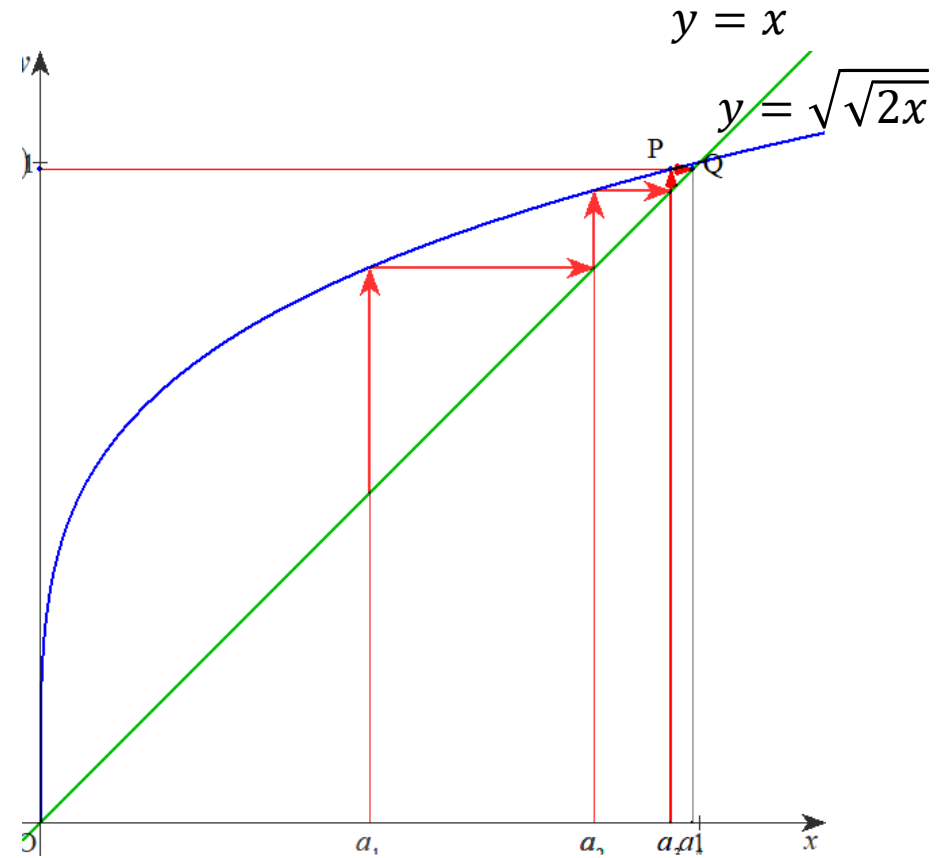
初期値



単調に増加



安定 (収束)



$$x^3 = 2$$

$$x^4 = 2x$$

$$x = \sqrt{\sqrt{2x}}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{2x_n}} \quad (x_1 = 1) \quad \sqrt{\sqrt{1.2599209}} \doteq 1.06$$

単調で上に有界な数列
なので、 $y = \sqrt{\sqrt{x}}$ と
 $y = x$ の交点が曲原点

8桁電卓が教える数学

8桁電卓で表示される数 $<10^8$

$2^n < 10^8$ とすると、

$n \log 2 < 8$

$$n < \frac{8}{\log 2} = \frac{8}{0.3010} = 26.578$$

$n = 26$ のとき最大になる。

$2^{26} = 10^m$ とおくと、

$m = 26 \log 2 = 7.826$

$\log 6 = 0.7781, \log 7 = 0.8451$ なので
 $7.7781 < 7.826 < 7.8451$ と評価して

$$10^7 \cdot 10^{0.7781} < 2^{26} < 10^7 \cdot 10^{0.8451}$$

$$6 \times 10^7 < 2^{26} < 7 \times 10^7$$

最高位の数は 6

実際に「 $2 \times =====$ …」としていくと、26乗で
67108864 となり、27乗でエラーになる。



また、「 $2 \div =====$ …」としていくと、24乗で0になる。

電卓は $2^{27} = \infty, 2^{-24} = 0$ という特殊な数体系で定義された世界。



整数は26ビット。小数は24ビット

8桁電卓が教える数学

	電卓の表示		電卓の表示
$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	2.25	$\left(\frac{129}{128}\right)^{127}$	2.7077238
$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	2.4414062	$\left(\frac{257}{256}\right)^{256}$	2.7129225
$\left(\frac{9}{8}\right)^8$	2.5657843	$\left(\frac{513}{512}\right)^{512}$	2.7155295
$\left(\frac{17}{16}\right)^{16}$	2.6379272	$\left(\frac{1025}{1024}\right)^{1024}$	2.7166763
$\left(\frac{33}{32}\right)^{32}$	2.6769858	$\left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}$	2.7169848
$\left(\frac{65}{64}\right)^{64}$	2.6973375	$\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096}$	2.7169548



単調に増加



安定（収束）

なぜ等しくなるのか

$\left(1 + \frac{1}{8}\right)^8$

$\left(\frac{9}{8}\right)^8 \rightarrow [9 \div 8 = \times = \times = \times =]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = e$

e の近似だったのだ



8桁電卓が教える数学

$$\begin{aligned}\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096} &= \left(1 + \frac{1}{2^{12}}\right)^{2^{12}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{2^{12}}\right)^2\right\}^{2^{11}} \\ &= \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{24}}\right)^{2^{11}} = \left(1 + \frac{1}{2^{11}}\right)^{2^{11}} = \left(\frac{2019}{2048}\right)^{2048}\end{aligned}$$

ここが桁落ちする！

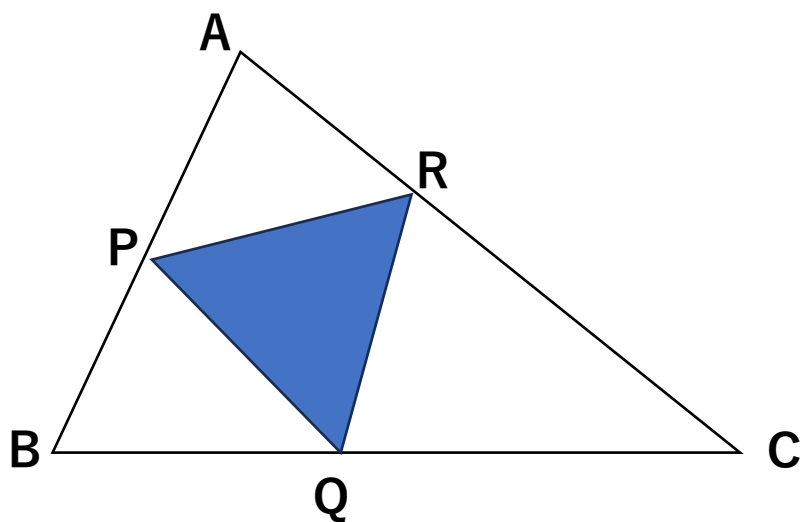
3 つながる数学

小中での既習事項とつなげて発展させる

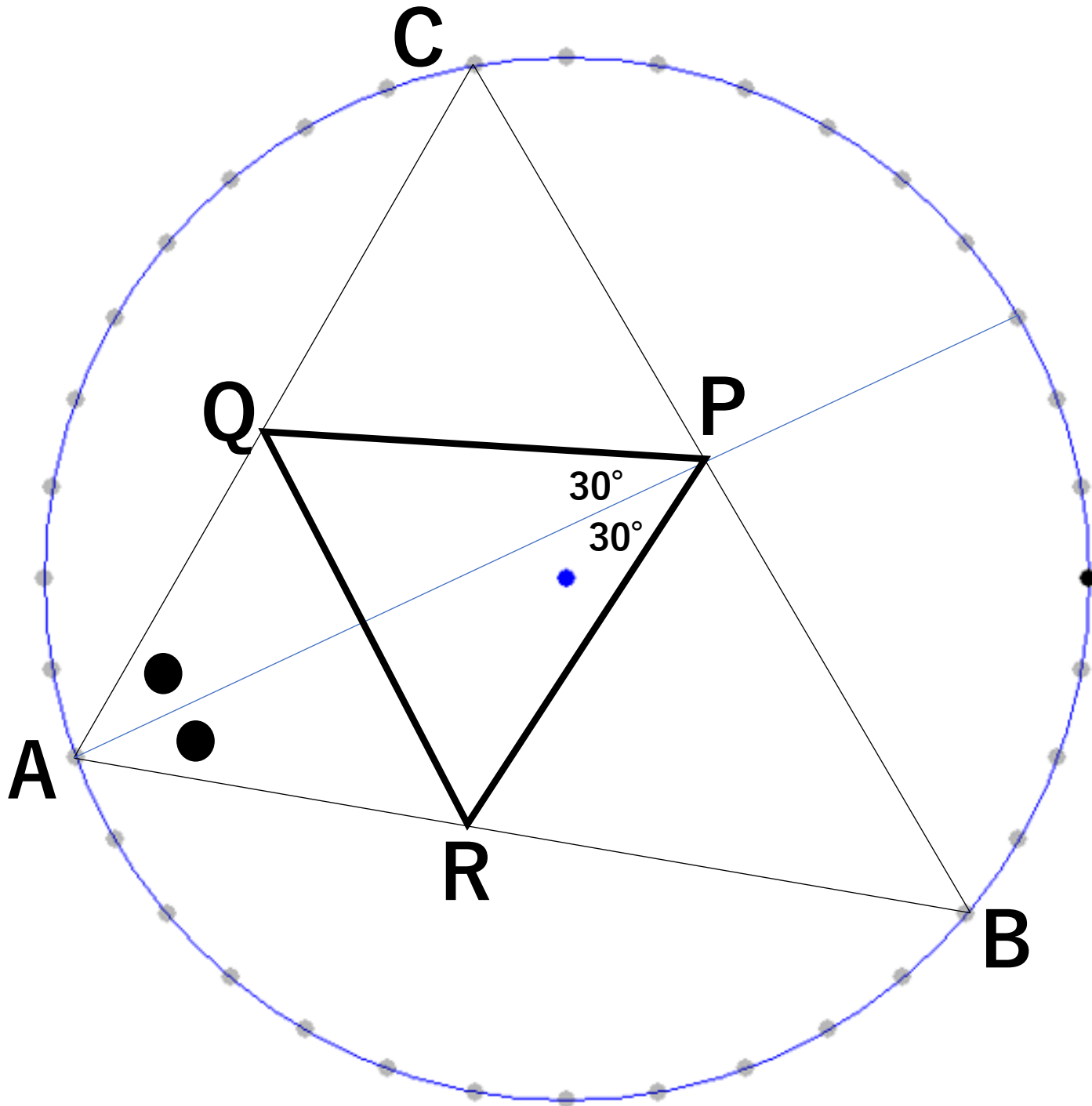
任意の三角形ABCに対して次の主張（★）が成り立つことを証明せよ。

（★） 辺AB,BC,CA上にそれぞれ点P,Q,Rを適当にとると三角形PQRが正三角形となる。ただし、P,Q,RはいずれもA,B,Cとは異なるとする。

（2023 京都大学 特色入試）



はて。
どうするか。
30° 60° の作図が
ポイントかな



三角形の内角の和は 180°

60° 以上の角が存在 (Aとする)

∠Aの二等分線を引く

三角形の外角は2つの内角の和
 $\angle APC = \angle B + \bullet$ $\angle BPA = \angle C + \bullet$

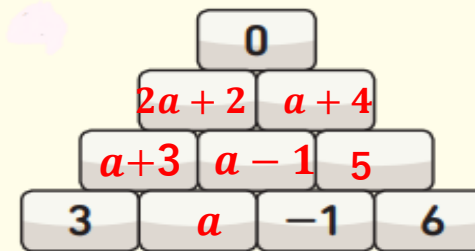
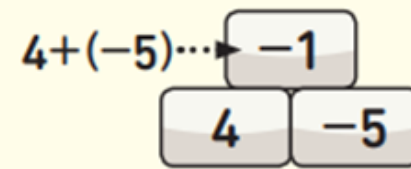
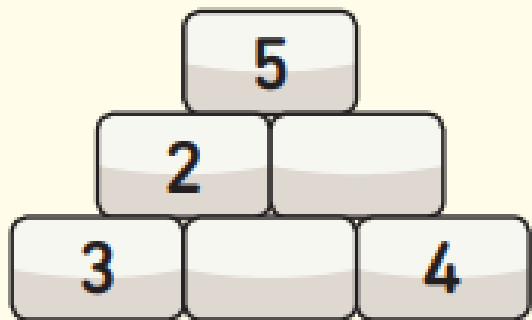
$\angle APC$ も $\angle APB$ も 30° より大

図のようにPQ, PRを引く

$\triangle PQR \equiv \triangle PAR$
角一辺一角 の合同

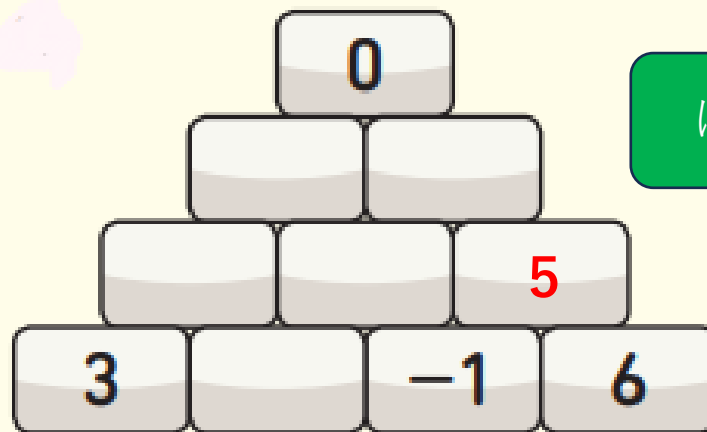
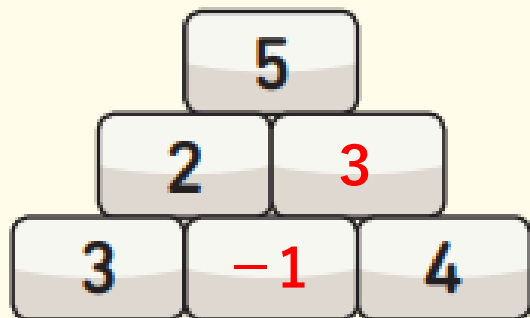
頂角 60° の二等辺三角形は正三角形

図のように、となり合う石垣 $\square$ の中に書かれた数の和がその上の段にある石垣の中に入る。このとき、下の2つの石垣に入る数を入れなさい。



$$3a + 6 = 0 \text{ より} \\ a = -2$$

僕は方程式で解いたぜ

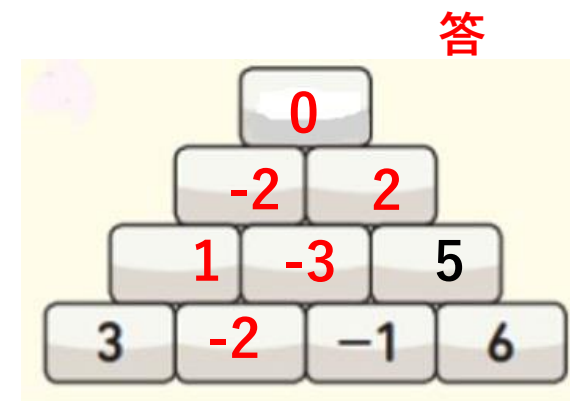
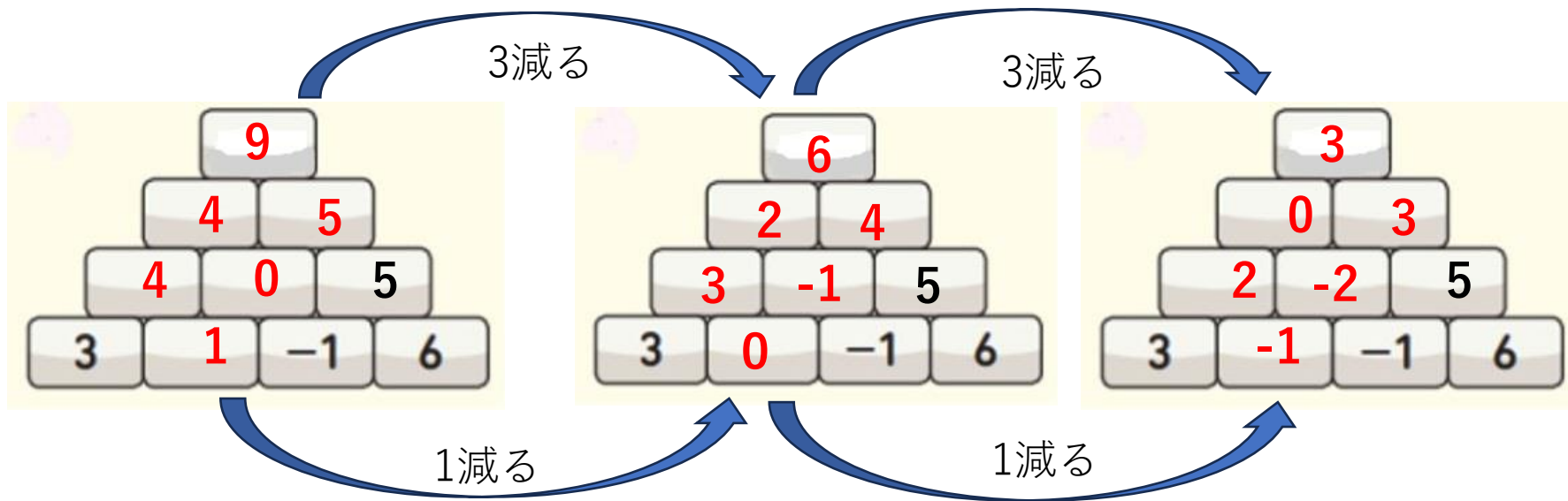


はて？

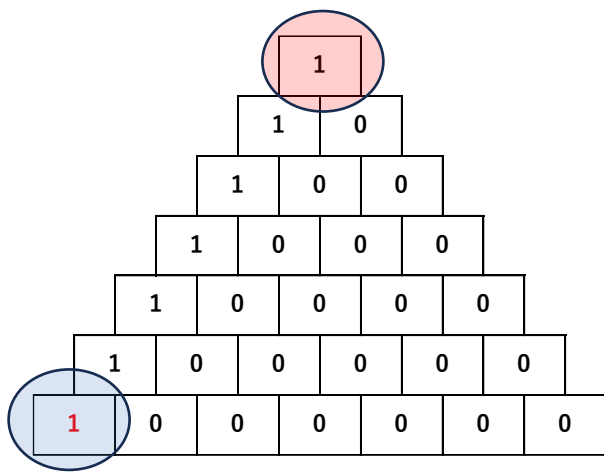


素直な心で眺めてみるのじゃ

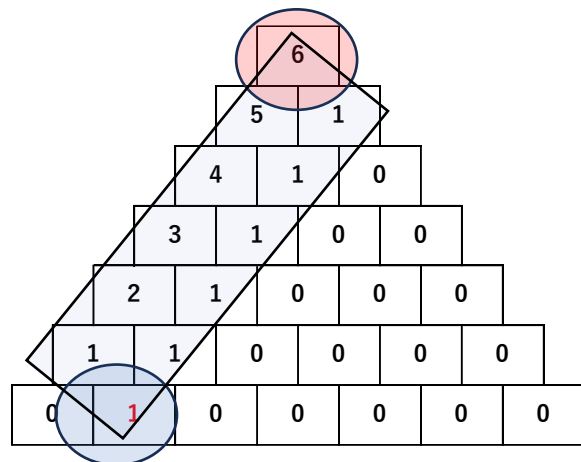




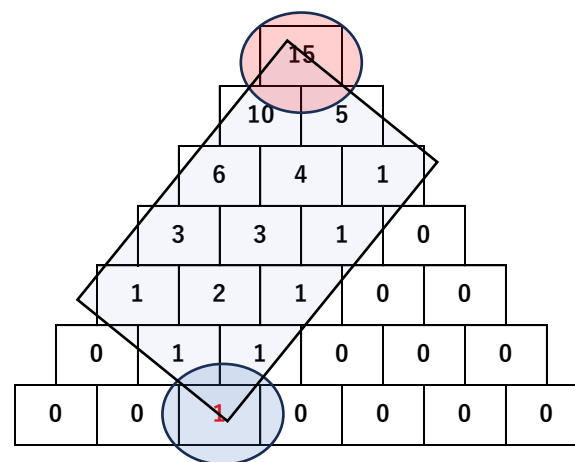
${}_6C_0$ 倍される



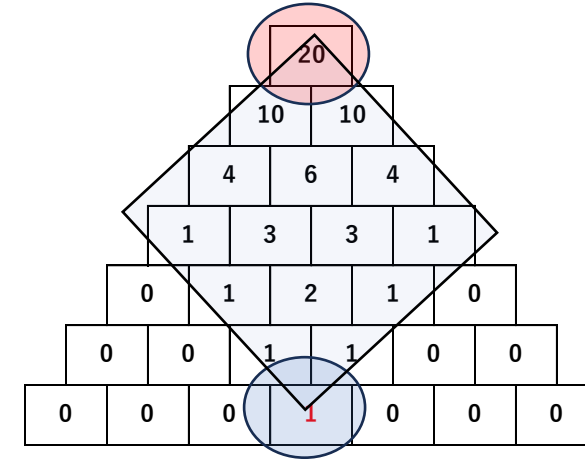
${}_6C_1$ 倍される

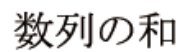


${}_6C_2$ 倍される



${}_6C_3$ 倍される





0

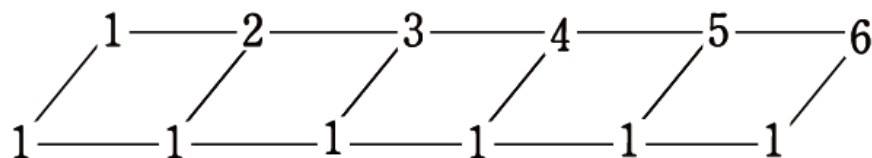
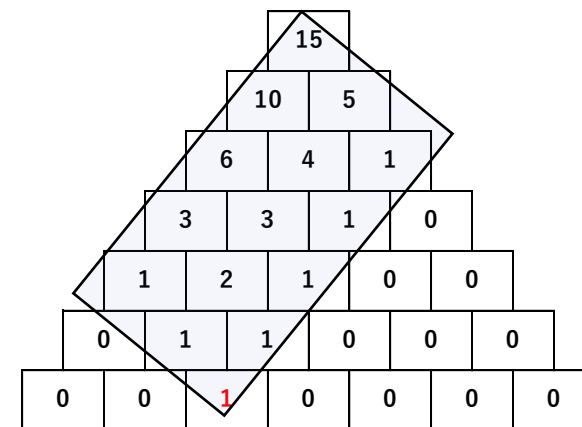
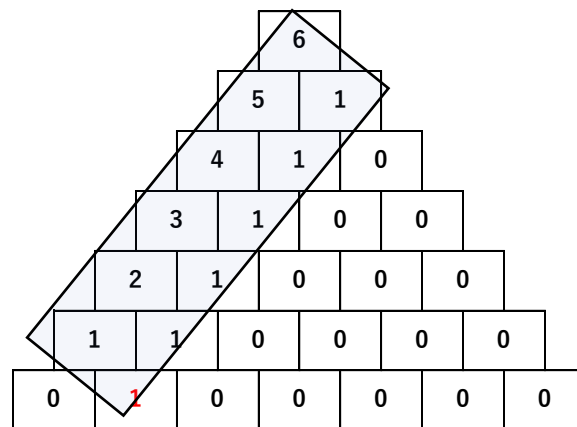
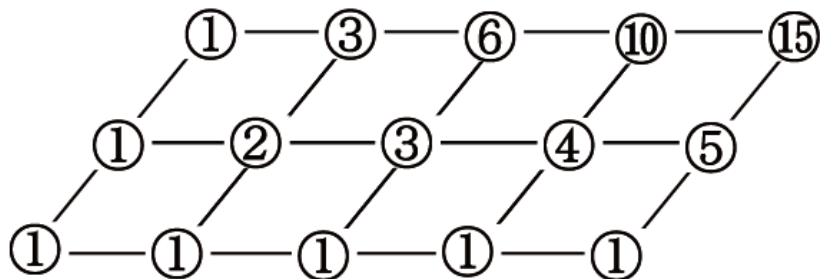
数列の各項

$$a$$

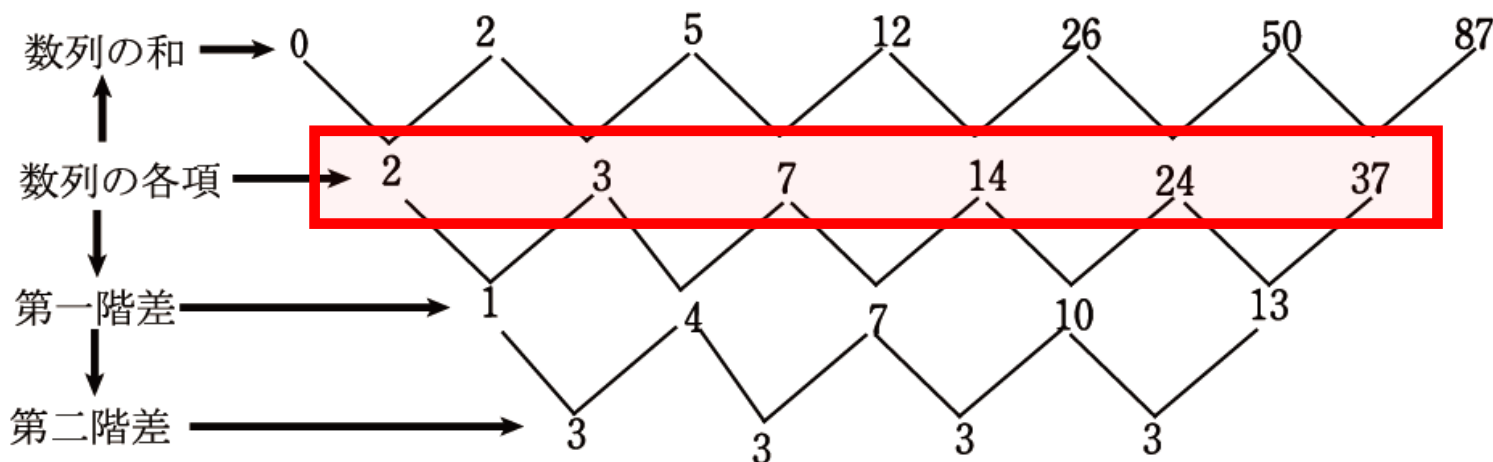
数列の階差



$$\begin{aligned} S_n &= {}_nC_1 \times a + {}_nC_2 \times d \\ &= na + \frac{1}{2}n(n-1)d \\ &= \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\} \end{aligned}$$

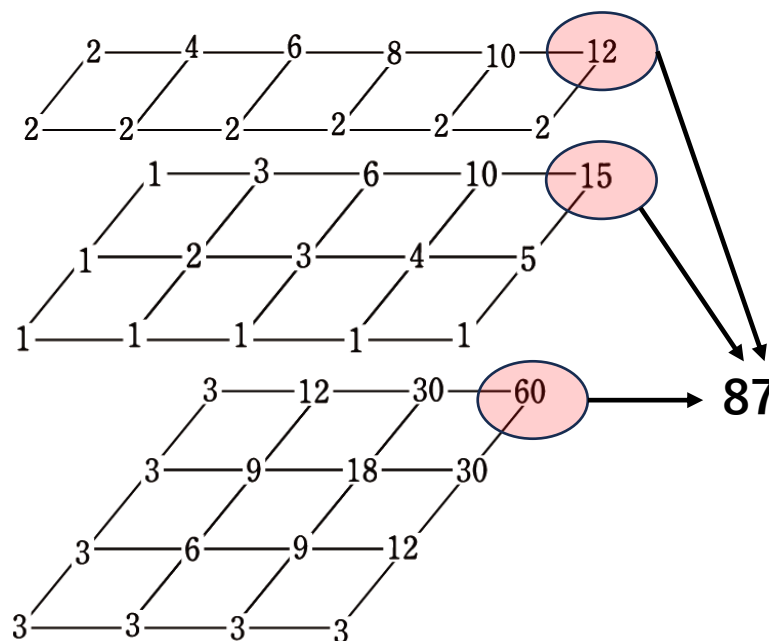
$${}_6C_1 = 6$$

$${}_6C_2 = 15$$


■ 2, 3, 7, 14, 24, 37, ... の第 n までの和を考えてみる



$$\begin{aligned}
 S_n &= {}_nC_1 \times 2 + {}_nC_2 \times 1 + {}_nC_3 \times 3 \\
 &= 2n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{3}{2}n(n-1)(n-2) \\
 &= \frac{1}{2}n\{4 + (n-1) + (n-1)(n-2)\} \\
 &= \frac{1}{2}n(n^2 - 2n + 5)
 \end{aligned}$$

■ 第6項に送られる数



■ 普通に解くと

階差数列は初項 1 公差 3 の等差数列なので
一般項は $3n - 2$

すると求める数列の一般項を a_n とすると

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2) \quad (n \geq 2)$$

$$= 2 + \frac{3}{2}n(n-1) - 2(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 8)$$

($n=1$ のときも成り立つ)

求める和を S_n とすると

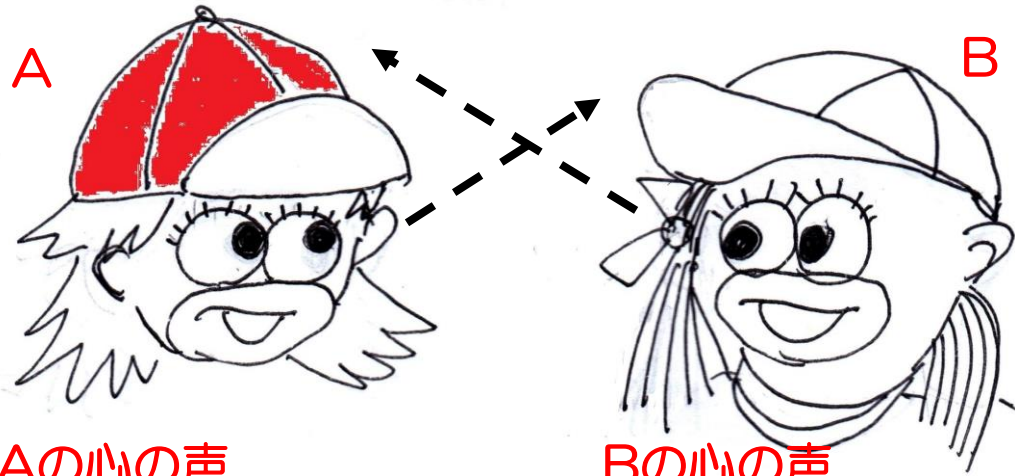
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(3k^2 - 7k + 8)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1) - \frac{7}{4}n(n+1) + 4n$$

$$= \frac{1}{4}n\{(n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 16\}$$

$$= \frac{1}{4}n(2n^2 - 4n + 10) = \frac{1}{2}n(n^2 - 2n + 5)$$

日常とつなげて考えてみる



Aの心の声

2人のうち少なくとも1人は赤で、彼女の帽子は白。ということは私は赤だわ!

Bの心の声

彼女の帽子の色が赤だから、私は赤かもしれないし白かもしれないわ

私が赤よ!



2人の心の声

彼女は赤だから、私は赤かもしれないし白かもしれない。

もし、私の帽子の色が白ならば、彼女は「私が赤よ!」と手を挙げるはず。(★)

彼女は手を挙げない。ということは私の色は白ではないんだわ。(★の対偶)

私が赤よ!



I



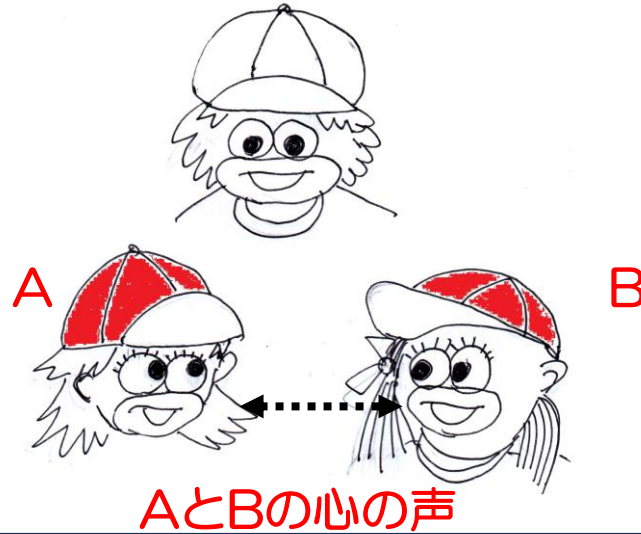
2人とも白。という
ことは私は赤だわ!



私が赤
よ!



II



私から赤と白が見えるわ。も
し私が白なら、彼女は「自分
は赤!」と手を挙げるはず



彼女は手を挙げない。という
ことは私の色は白ではない。

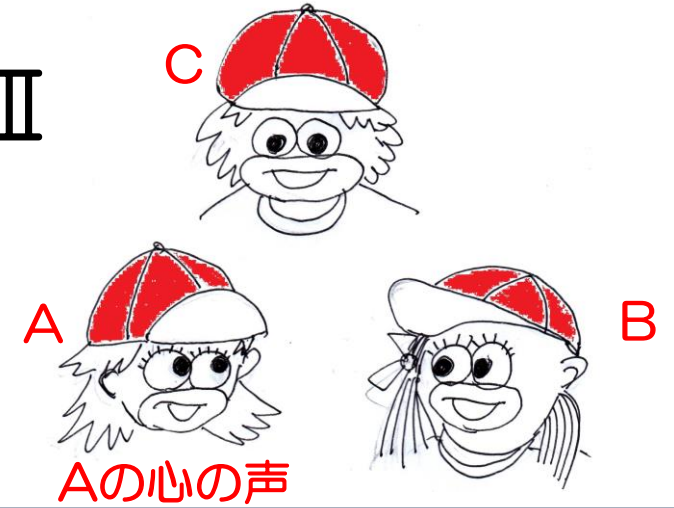


私が赤
よ!



私が赤
よ!

III

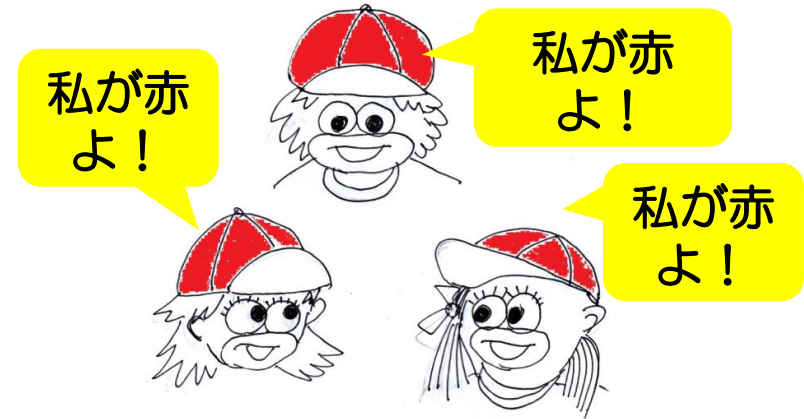


もし私が白なら、B、Cから見
るとⅡのパターンになるので一呼吸
おいて同時に手が挙がるはず。

B,Cは手を挙げなかった。という
ことは私は赤だ。

B,CもAと同じことを考えるので

私が赤
よ!

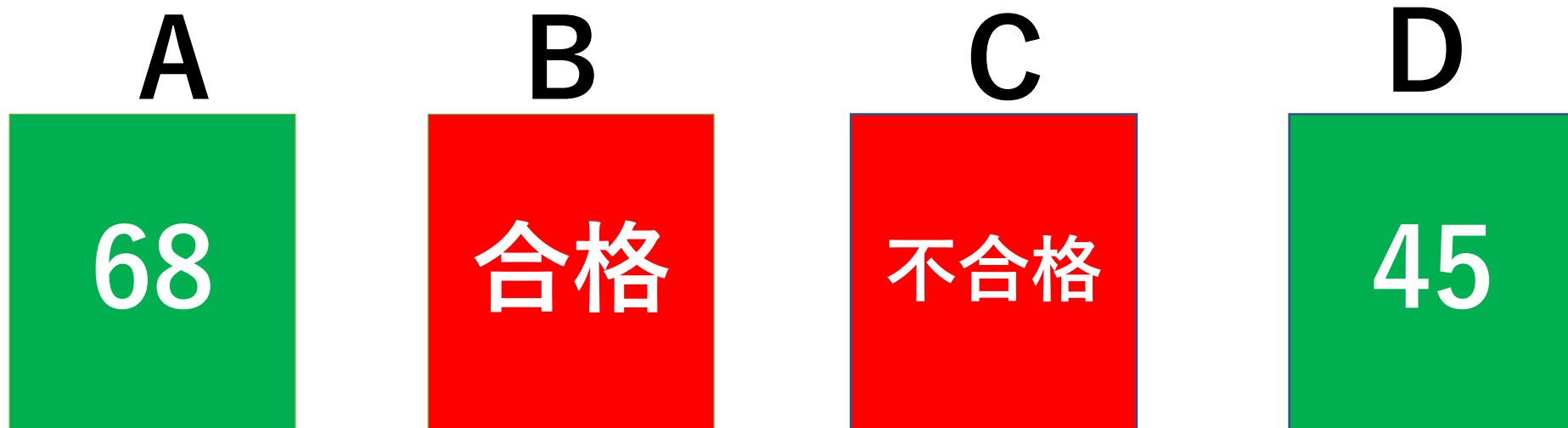


私が赤
よ!

私が赤
よ!

下図のように、片面に数字、裏面に「合格」または「不合格」の文字が次のルールで書かれています。

カードに50以上の数が書かれていれば、その裏面には「合格」と書かれている。



このルールが守られているか確認するには、最低A,B,C,Dのどのカードを裏返して見ればいいでしょうか。

下図のようなA,B,C,Dの4枚のカードがあります。カードには次のルールで言葉が書かれています

「PCR陽性」とかかれたカードの裏面には
「感染」と書かれている



このルールが守られているか確認するには、最低A,B,C,Dのどのカードを裏返して見ればいいでしょうか。

単元間のつながりを考え教材観を持つ

実数 a, b, c において、 $a + b + c = 1$ のとき、 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ を示せ

① 1文字消去

$$C = 1 - a - b \text{ より}$$

$$a^2 + b^2 + C^2 = a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2$$

$$= 2a^2 - 2(1-b)a + 2b^2 - 2b + 1$$

$$= 2 \left\{ \left(a - \frac{1-b}{2} \right)^2 - \frac{(1-b)^2}{4} \right\} + \frac{8b^2 - 8b + 4}{4}$$

$$= 2 \left(a - \frac{1-b}{2} \right)^2 + \frac{8b^2 - 8b + 4 - 2b^2 + 4b - 2}{4}$$

$$= 2 \left(a - \frac{1-b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (3b^2 - 2b + 1)$$

$$= 2 \left(a - \frac{1-b}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(b - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} //$$

等号成立は $b - \frac{1}{3} = a - \frac{1-b}{2} = 0$ のとき

$$\therefore a = b = c = \frac{1}{3} \text{ のとき}$$

② シュワルツの不等式

任意の実数に対して

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

が成り立つので

$$x = y = z = 1 \text{ とおくと}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^2 = 1$$

$$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \quad // \text{ 示した}$$

等号成立は $a:b:c = x:y:z$ のとき
なので

$$a:b:c = 1:1:1$$

$$\therefore a = b = c = \frac{1}{3} \text{ のとき}$$

③ ベクトルの内積

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ より両辺=乗して

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

ここで $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ ので

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \dots (*)$$

今 $\vec{a} = (a, b, c)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ とし (*) に代入すると.

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + 1 + 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{示す})$$

等号成立は $\cos \theta = 0$ つまり 2つのベクトルが平行のときなので $\vec{a} = k\vec{b}$

よて $a = b = c = k$, $a + b + c = 1$ から

$$a = b = c = \frac{1}{3} //$$

④ 自明な不等式

$$(a - \frac{1}{3})^2 + (b - \frac{1}{3})^2 + (c - \frac{1}{3})^2 \geq 0 \text{ は明か}$$

ことき左辺を展開して

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{2}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3} \geq 0$$

$$a + b + c = 1 \text{ より}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} // \quad (\text{示す})$$

等号成立は最初の式より

$$a = b = c = \frac{1}{3} \text{ とき}$$

⑤ 分散の考え

3つの数 a, b, c の分散 $V(x)$ を考えて

$$V(x) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

(分散 = 2乗平均 - (平均)²)

$a+b+c=1$, $V(x) \geq 0$ に注意して

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \frac{1}{9} \geq 0$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{証明})$$

等号成立は分散が 0 になるとき、つまり
ばらつきが無いときなので

$$a=b=c=\frac{1}{3}$$

⑥ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ の利用

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{今、} a+b+c=1 \text{ より}$$

$$(a+b+c)^2 = 1$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 - 2(ab+bc+ca) = 1$$

$$\text{よって } ab+bc+ca = \frac{1}{2} \{ 1 - (a^2+b^2+c^2) \}$$

これを (*) に代入して

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{証明})$$

等号成立は (*) より $a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき

⑦ 平面と球面の方程式

abc平面上において、 $a+b+c=1$ は
 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ を通り、法線
ベクトルが $\vec{n}=(1,1,1)$ である平面を表す。
また、 $a^2+b^2+c^2$ は、原点と平面上の点
 $P(a,b,c)$ の距離の2乗を表す。

平面 $a+b+c=1$ と原点との距離 d は、

$$d = \frac{|1+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{これが最小となる}$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{示す})$$

平面 $ax+by+cz=d$ と $A(x_1, y_1, z_1)$
の距離
$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

⑧ 定数変化法

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2+b^2+c^2 \\ &= 2a^2-2(1-b)a+2b^2-2b+1 \end{aligned}$$

$$f'(a)=0 \quad \text{とすると}$$

$$a = \frac{1-b}{2}$$

このとき、

$$f(a) = \frac{3}{2}b^2 - b + \frac{1}{2}$$

$$g(b) = \frac{3}{2}b^2 - b + \frac{1}{2} \quad \text{と、} b \text{ の関数とみる。}$$

$$g'(b)=0 \quad \text{のとき、} g(b) \text{ は最小となる}$$

$$3b-1=0 \quad \text{より} \quad b=\frac{1}{3}$$

$$\text{最小値は } g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

すなわち、

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad \text{等号成立は } a=b=c=\frac{1}{3}$$

⑨ 凸関数の性質

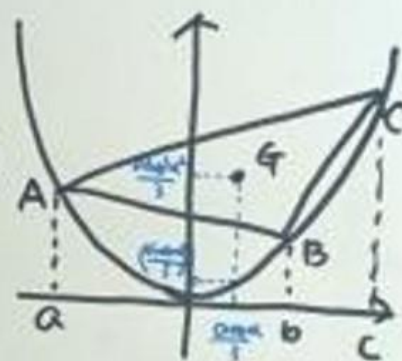
$f(x) = x^2$ を考える. a, b, c に対して
 $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))$ をとる

$\triangle ABC$ の重心を G とすると

$$G\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)$$

$y = x^2$ は下に凸より

G はグラフの上側の点である



$$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$a+b+c=1 \text{ より}$$

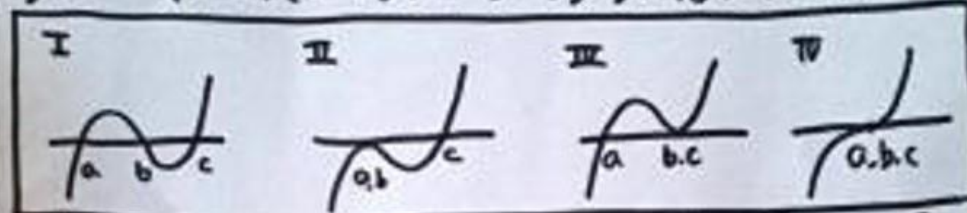
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{等号成立})$$

等号成立は G が $y = f(x)$ 上にあるとき
 となる $a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき

⑩ 3次関数と方程式

a, b, c が実数 n とし

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは図の様になる



$$f(x)=0 \text{ かつ } D > 0$$

$$f(x)=0 \text{ かつ } D = 0$$

$$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \text{ より}$$

$$a+b+c=1 \text{ とき}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + (ab+bc+ca)$$

$$I \sim IV \text{ かつ } f'(x)=0 \text{ かつ } D \geq 0$$

$$\therefore 1 - 3(ab+bc+ca) \geq 0 \quad (*)$$

$$\because (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{ かつ } (*)$$

$$\frac{1 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \leq \frac{1}{3}$$

等号成立は III かつ $a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{等号成立})$$

⑪ 相加 相乗平均の不等式

相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab| \quad \text{---①}$$

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq |bc| \quad \text{---②}$$

$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq |ca| \quad \text{---③}$$

$\left. \begin{array}{l} a=b=c \text{ のとき} \\ \text{①②③ は同時に} \\ \text{等号成立} \end{array} \right\}$

①②③の辺を加えて

$$a^2+b^2+c^2 \geq |ab|+|bc|+|ca| \geq ab+bc+ca$$

(等号成立は $a=b=c$ のとき) L (*)

ここで $(a+b+c)^2=1$ より

$$ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

(*)より

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3} \quad (\text{等号成立は } a=b=c=\frac{1}{3} \text{ のとき})$$

⑫ 実数条件

α, β を解とする2次方程式は $t^2-(a+b)t+ab=0$

ここで a, b, b, c, c, a について適用させると

$$t^2-(a+b)t+ab=0 \Leftrightarrow t^2-(1-c)t+ab=0 \quad \text{---①}$$

$$t^2-(b+c)t+bc=0 \Leftrightarrow t^2-(1-a)t+bc=0 \quad \text{---②}$$

$$t^2-(c+a)t+ca=0 \Leftrightarrow t^2-(1-b)t+ca=0 \quad \text{---③}$$

①②③において実数条件から

$$\begin{cases} (1-c)^2-4ab \geq 0 \\ (1-a)^2-4bc \geq 0 \\ (1-b)^2-4ca \geq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} a=b=c \text{ のとき同時に} \\ \text{等号成立} \end{array} \right)$$

Ⅲを加えて

$$a^2+b^2+c^2-2(a+b+c) \overset{(+3)}{-} 4(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2+1-4(ab+bc+ca) \geq 0 \quad \text{---(*)}$$

ここで $(a+b+c)^2=1$ より

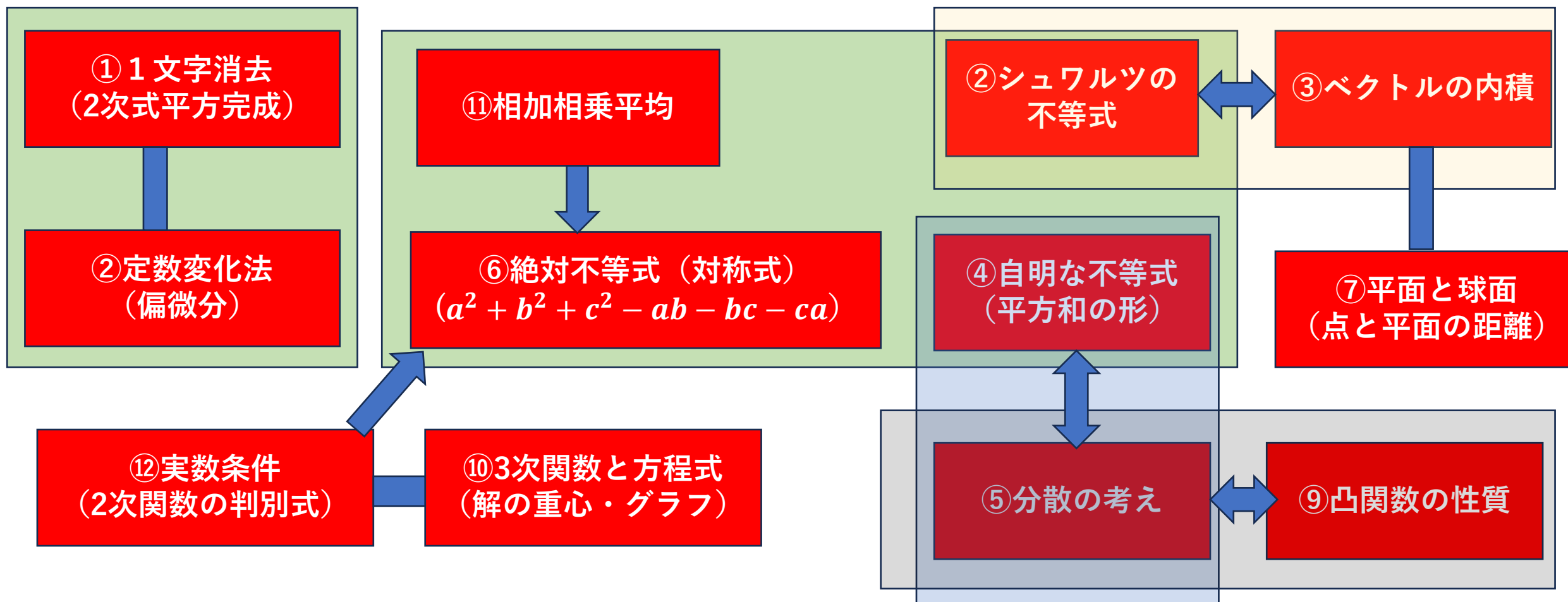
$$ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2} \quad \rightarrow \quad \therefore a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

(等号成立は)

(*)より

$$a^2+b^2+c^2+1-2+2(a^2+b^2+c^2) \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ a=b=c=\frac{1}{3} \text{ のとき} \end{array} \right)$$

実数 a, b, c において、 $a + b + c = 1$ のとき、 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ を示せ





4 オマケ 私のささやかな well-being Math.

今日の「 」はどうでしたか？ 盛岡駅前店

■ 召し上がった料理名 ()

■ ご来店 (月 日 AM 時 分) (男性 名、女性 名)

■ 年齢 (9歳以下・10代・20代・30代・40代・50代・60代以上)

■ 当店では、濃厚で香ばしいアツアツスープを提供しております。
スープはいかがでしたか？ 温度 (あつあつで旨い・ぬるい)
味 (濃厚で旨い・旨い・まずい・薄くてとてもまずい)

■ 当店では、小麦が香る当店専用の自家製麺を提供しております。
麺はいかがでしたか？ (香り良く旨い・旨い・かたい・やわらかい)

■ 当店では、やわらかくて大きいチャーシューを提供しております。
チャーシューのやわらかさは？ (とてもやわらかい・やわらかい・かたい)
チャーシューの大きさは？ (大きい・小さい・とても小さい)

■ 接客は笑顔でしたか？ (とても笑顔・笑顔・無表情・無愛想)

■ 店の清潔度はいかがでしたか？
(とてもキレイ・キレイ・汚い・とても汚い)

■ 私達は、スタッフ全員が店外まで聞こえる活気をモットーにしています。
本日の活気は☆☆☆☆つでしたか？ (☆を○で囲んで下さい)

低 ← ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ → 高

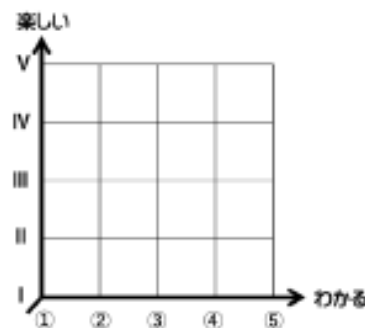
■ 私達は、皆様の声援で勇気づけられます。ご意見などお聞かせ下さい。

■ 『笑顔が輝いていたスタッフ』を
1人お教え下さい。

■ またお越しいただけますか？ (ぜひ来たい・できれば来たい・もう二度と来ない)
ご協力ありがとうございました。
アンケートは店内の回収BOXに投函して下さい。

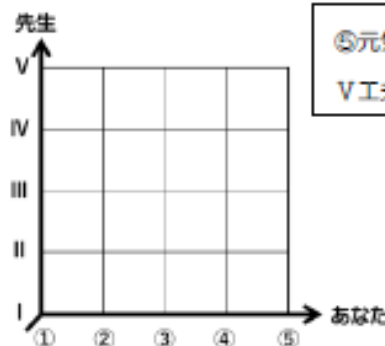
 月 日 氏名

■ 今日の授業は楽しかったですか、また理解度はどの程度でしょうか。5段階で何となく当てはまると思うところに★印をつけてみてください。



【今日の授業でどんなことを学びましたか】

■ 今日の授業へのあなたの取組みを5段階で自己評価するとどのあたりですか。また、しもまっちは笑顔で活気ある態度で授業を行っていたでしょうか。5段階で評価して、当てはまる位置に★印をつけてください。また、私たち教師は、皆さんの声援で勇気づけられます。何か意見があれば聞かせてください。



⑤元気でやる気満々 ④笑顔で前向き ③普通 ②あまりやる気がなかった ①全くやる気がなかった
V工夫されていて活気ある授業 IV笑顔で楽しそう III普通 II工夫がなく一方的 Iコワかった

【今日の授業の感想や意見などあれば聞かせてください】

■ 今日の授業の MVP を(自分も含めて)選ぶとすれば誰でしょうか。もしあれば教えてください(複数可)。

9月14日（木）

高1 藤

本日のMVP

しゅるさん
（10票）

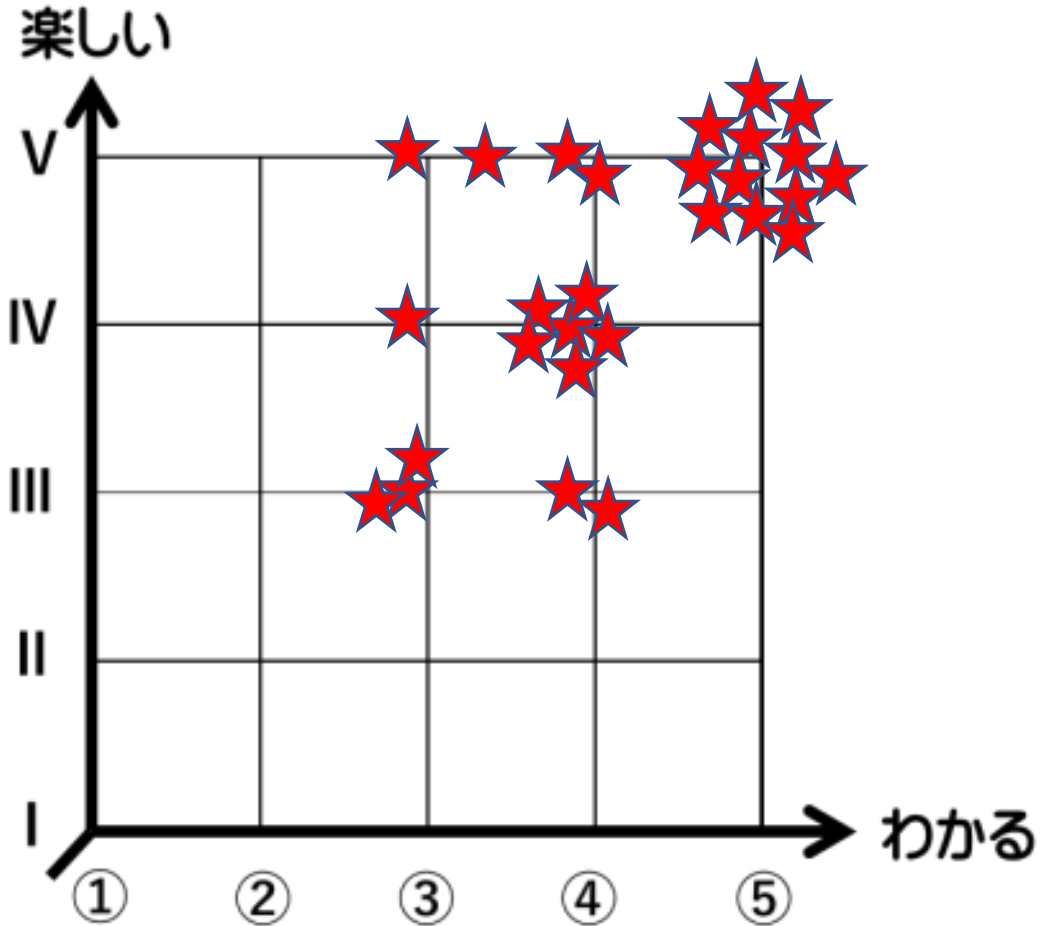


帽子の実験で
活躍した

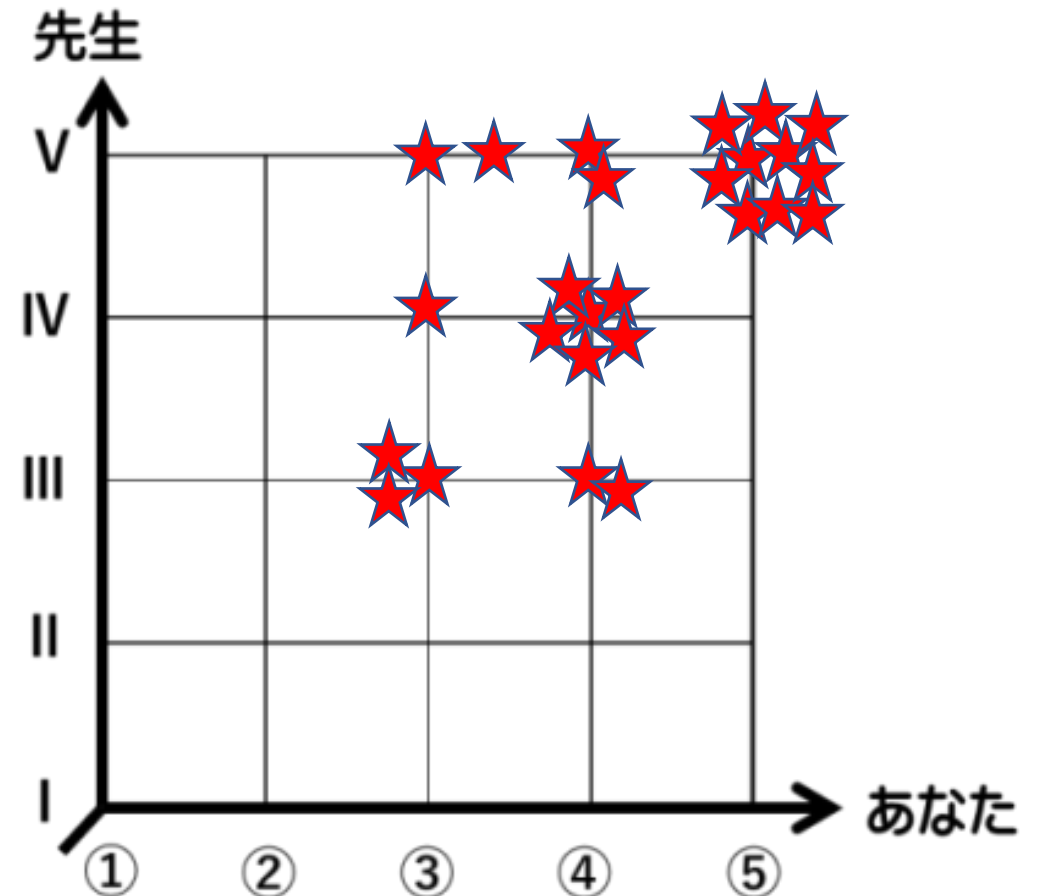
授業の概要

- 期末考査の返却と解説（20分）
- 論理（対偶・背理法）に関するクイズ（賞品付）
- 論理（対偶・背理法）の実験「赤い帽子・白い帽子」
※3人の生徒に演示してもらう（好評）・ビンゴマシーン活用

目指せ！わかって楽しい授業

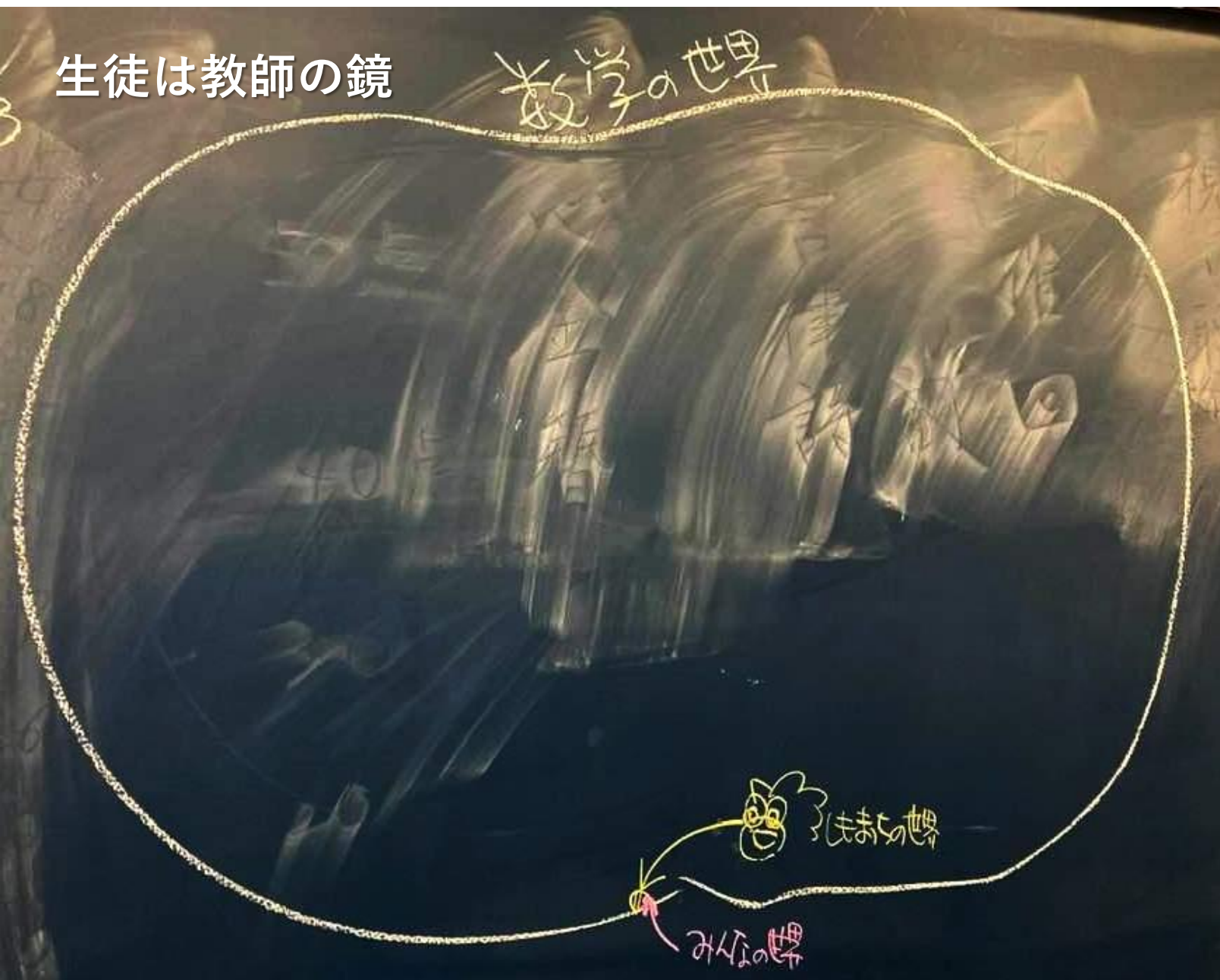


みんなと先生ともにハッピー



⑤元気でやる気満々 ④笑顔で前向き ③普通
②あまりやる気がなかった ①全くやる気がなかった
V工夫されていて活気ある授業 IV笑顔で楽しそう III普通
II工夫がなく一方的 Iコワかった

生徒は教師の鏡

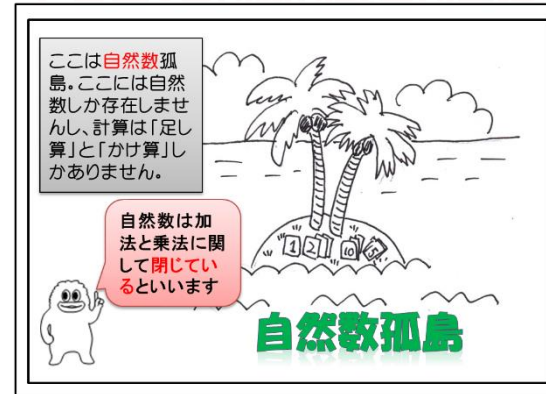


授業で学年末テストを返しました。生徒たちは「平均点は何点ですか」「最高点は誰ですか」などと聞いてきます。私はそういうのは言わないことにしているのですが、最大の関心事のようです。そこで、黒板に「数学の世界」として大きな円を描きました。「これが数学の世界だとすると、私はどのくらいの部分を占めていると思う？」と聞いたら、「半分」とか「 $\frac{2}{3}$ くらい」などと言ってくれます。私は隅っこに、豆粒のような円を描いて、私はせいぜいこんなもの。皆は私よりもっと豆粒だよ。つまり、数学の神様から見れば、35点も95点も、先生も生徒も大して変わらない。だったら、誰に何点負けたとか、最高点は誰かとかなんて騒ぐのって、ちっぽけな問題だよ。テストの度に生徒が平均点や最高点を気にするのは心が痛い。なぜなら、生徒は教師の鏡だから。つまり、それを一大事のように刷り込んできた、私を含めた教師の側に責任があると思うからです。

数の世界からダイバーシティの話に



しもまっちの数の世界の冒険



①には2つの顔がある!!

絶対のゼロ

基準のゼロ

気温や水深などは—を使います
なので0はプラスとマイナスの基準になります!!

基準だよ

こんなかんじで、0より小さくならないときは「絶対のゼロ」です!! 例えは食べ物や牛乳は0より少なくなることはないので絶対のゼロということになります!

29頁の計算で使える法則

まずまず四則ってなに!?

四則とは... 加法(たし算)、減法(ひき算)、乗法(かけ算)、除法(わり算)をまとめた呼び方のこと

それぞれの計算の結果を **和(+)**、**差(-)**、**積(x)**、**商(÷)** という。

1 加法の交換法則
 $a + b = b + a$

どちらからたしても答えは一緒!!

2 加法の結合法則
 $(a + b) + c = a + (b + c)$

例) $(-7) + (12) + (4) = (-7) + (12 + 4)$

かっこを2重で使うときは { } を使うことがあるよ

3 乗法の交換法則
 $a \times b = b \times a$

例) $(-3) \times 5 = 5 \times (-3)$

2 $2 \times 3 = 6$

3 $3 \times 2 = 6$

ねこさんと学ぶ!

数学の旅

~正負の数~

よろしくね

1年桜

もう1つは... **基準のゼロ**

明日の盛岡市は-5℃と例年より低い見込みとなるでしょう。

数直線で表すと...

正の方向

原点

負の方向

数直線上で0が対応している点を**原点**といいます。
数直線の右の方向を**正の方向**、左の方向を**負の方向**といいます。

また、+2や+5のような数を**正の数**と言い、-3や-5.5などの数を**負の数**といいます。
0は正でも負でもない数で、正の整数のことを**自然数**ともいう

open! 大事! OPEN

このように気温や海拔などは0より大きい数や小さい数を使って表すことができます。

海拔200m

水深400m

基準の0

マイナスの数を使った計算で難しそう...

そう思ったそこのあなた! 計算はまずきちんと理屈やルールがわかれば怖いものなしです。
ねこさんと一糸に、楽しい数学の旅へ...

まず **絶対のゼロ**

①には2つの顔があるというのを覚えておきましょうか。

例えは...

絶対のゼロ

キャンディの数

6

3

0

キャンディは0個以上小さくなりません。これを**絶対のゼロ**といいます。

数学教室

1年桜

贈ろうプラスのストローク

重要な所などが、こういう
やつがはってあっていいと
思った。直線がとてまっ
すぐで見やすい。ナ、のやつ
でい月を使っているのが
いいとおもった。

まとめてあった。

解き方だけでなく、説明し
たものの問題も3つぐらいあって、
すごくいいなって思いました!!
数直線使った説明分かりやすい!!



例1の答え

(1) -6

(2) -0.8

(3) $\frac{4}{15}$

キャラクターがしゃべってくれ
たり、かわいいイラストなど
がついていたので分かり
やすかった! 色使いも
上手い!!

色の使い方がとっても
きれいで見やすい!
動物さんたちの、ポイン
ト解説が個人的
にはわかりやすくア
ダクです。

おもしろい

内容はめっちゃいい入っているの
に、ゴチャゴチャしない戸がすいとい
思います。特に交換・条合法則に
ついてわかりやすかったです
分酉配法則についても図と
ポイント書いた囲いを用い
てわかりやすかったです。

図々^o^
これに
ついでの説明も
分かりやすかったです。



数学とは最適を求める旅



私は生徒に「**数学とは最適を求める旅**」と言っています。実際、数学では最大値や最小値を求める問題が多く登場します。私は、数学の問題解決とは、どうすれば最適な解に到達できるかについて、様々な視点から考察し、試行錯誤し解決に向かっていこうとすることだと思っています。

そしてそれは、数学という教科を超えて、**世の中の不合理に対してきちんと批判の目を向ける力になったり、あるいは、より幸せに生きるにはどうするかといった、「より良くしよう」精神につながる**ことだと生徒たちには話しています。

先ほどの石鹸膜、完璧な円になることに驚かされます。それは、限られた長さの糸の中での最大面積、つまり石鹸膜にとって最高の幸せな状態を自ら生み出そうとした結果なのだと私は思います。ごさしく振る舞うのではなく、自然のまま、あるがままに居続けることが幸せなこと。猫も同様です。球が最適であることなんて猫は知りません。でも、幸せな状態になろうとすると、そこに美しいフォルムが自然に生まれるのです。

ならば、人間も、今置かれている環境の中で、最適な自分を見つけることが幸せなことであり、他者の言葉、人の評判、自分の中にある誰かによって作られた声そんな様々な雑音は、本来自然にできるはずのまん丸の円を「いびつな円」にしてしまいます。本当は人も猫や石鹸膜同様、完全な円を作っていたはずなんです。（しもまっちのブログ「あなたと夜と数学と」より抜粋）