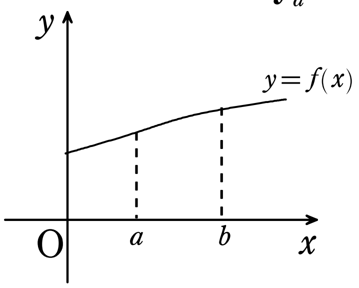
盛岡三高K君との数学談義

～線積分と面積分の話～

いよいよベクトル解析に入ったK君。絶好調です。rot , div , $\triangle, \nabla$ なども自由にこなせるようになってきました。今日は、線積分と面積分についての話です。

K：線積分と面積分のイメージがよくつかめないのですが。

T：ではまず、線積分から考えてみましょう。私も大分昔にやったものなので忘れています。勘違いがあるかもしれません。やはり1変数関数からスタートしたいと思います。1変数関数の積分、$\int_a^b f(x)dx$ もいってみれば線積分です。



K：曲線 $f(x)$ 上を点が動くということではないですよね。

T：$f(x)$ という曲線に沿っていくというのではありません。ある質 点が x 軸上に沿って動くと考えます。

K：質点 P が x 軸に沿って、a から b まで動いていくということですね。

T：そうですね。このときの微小増分を動座標的にとらえたものが dx で、その動きの総和は、$\int_a^b dx = b-a$　となります。

K：つまり質点の移動距離が、$\int_a^b dx = b-a$　として表されているのですね。

T：正確に言えば、「符号付」移動距離ですね。そうすれば加法性が成り立ちます。

K：加法性とは？

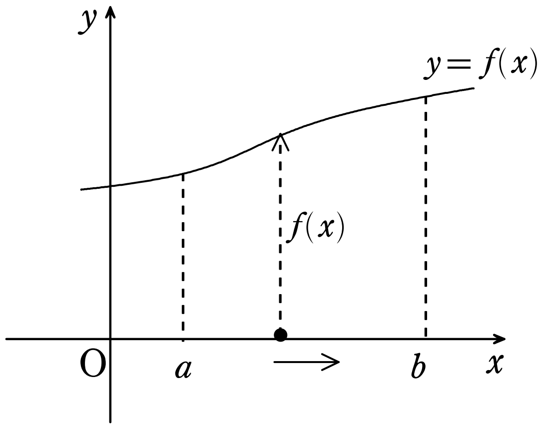
T：$\int_a^b dx = -\int_b^a dx$ 、$\int_a^b dx + \int_b^c dx = \int_a^c dx$ 、$\int_a^a dx = 0$ といったところです。

K：つまり、$x=a$ から出発して、$x=a$ に再び戻れば、符号付移動距離は0になるということですね。つまり変位のような感じですね。

T：そうですね。

K：では、$\int_a^b f(x)dx$ とはどういう意味になりますか。

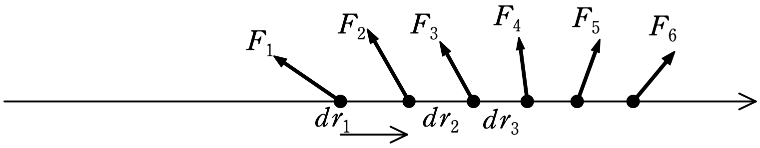
T：こんな例えはどうでしょう。今、ある人が、 x 軸上を A から B まであるいているとします。そのとき、ただ歩いているのではなく、何か仕事をしながらあるいていると考えます。そうですね。例えば一歩歩いて、自分の真上にある $f(x)$ のグラフの位置を計算するというのはどうでしょう。そしてそれを電卓で計算して、総和を求めていくんです。



K：つまり、これが、$\int_a^b f(x)dx$ ということですね。

T：そうですね。今の例では、この量は面積というものになるでしょう。

もう一つ例をあげましょう。今度は、 x 軸上を動く質点に、ある力が連続的に加えられているという場を考えます。



これらの力はそれぞれ向きを持っていますから、質点に及ぼす実際の力は x 軸への正射影を考えなければなりません。

K：ということは内積ですね。$\vec{F}\cdot d\vec{r}$ をその瞬間瞬間で計算してその総和を考えるということですね。

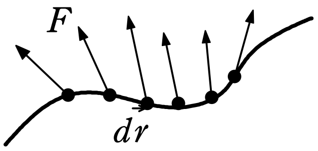
T：そうです。するとその総和を、$\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$ という積分で考えることにするわけです。

最初の例は「スカラー場」での積分で、こちらは「ベクトル場」での積分となります。

K：スカラー場は dx 一つ一つが止まっていてそれぞれに対してある積を行っているのに対し、ベクトル場では、質点が「流れている」というイメージがわきました。

ところで、この $\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を「仕事」といいましたね。

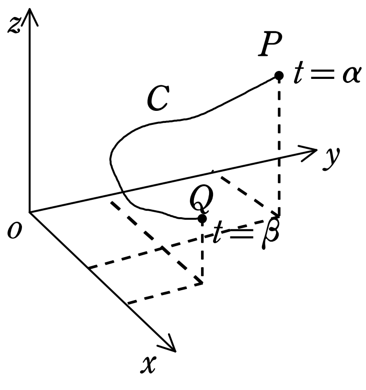
T：そうですね。さて、今のこの考えは、別に質点が「x軸上を動く」としなくてもいいですよね。ある曲線に沿ってPが動き、その各点においてそのつどある演算（積）を行っていくとか、ある空間上の曲線にそって動く質点に力を加える（または力を働かせることによって質点が移動する）ということも考えられるわけですね。



$$\int_C F \cdot d\vec{r}$$

K：なるほど。これが線積分のイメージですか。
T：では、具体的な例で線積分を行ってみましょう。

T：まず、スカラー場での線積分を考えてみましょう。質点が沿っていく曲線は平面上のものでも空間上のものでもかまいません。閉じた曲線（閉曲線）でもいいです。
K：なめらかな曲線ですね。
T：十分なめらかならばいいとします。例えばアステロイドなんかは尖ったところがいくつかありますが、そのようにいくつかの点で微分できない点があっても線積分は考えることができます。
K：微分可能なところを区分的に区切ってそれぞれ線積分を求め、それをそれぞれ足しあわせていけばいいということですか。
T：そうですね。つまり積分の加法性が効いてくるわけです。
では、ここでは３次元空間上での曲線Cを考えることにしましょう。



今、図のような曲線に沿って、質点がPからQまで動くとします。このCの方程式は、パラメータtで表されるとします。
つまり、
C: $\vec{r}(t)=(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))$ です。
$t=\alpha$のときが点P、$t=\beta$のときが点Qであるとしましょう。

ここで、注意しておくのは、曲線Cの長さです。
Cの長さをsとすると、

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$ がいえるのはいいですか。

K：ピタゴラスの定理ですね。これの平面版の話は数Ⅲの教科書にも出てきますね。

すると曲線の長さは、$s=\int_C ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$　となります。

T：そうですね。このdsは確か「線素」といったと思います。重要ですので押さえておきましょう。

さて、ではここで線積分を考えます。今、このCを動く質点に、ある力$f(x,y,z)$が加えられていると考えて　$\int_C f(x,y,z)ds$という線積分を考えてみましょう。

これはどのように求めていけばいいでしょう。

K：方針は、tで積分する形にすればいいのですね。

T：そうですね。**線積分は常に1変数関数の積分に帰着する**はずです。

K：$\int_C$ を$\int_\alpha^\beta$ にして、$f(x, y, z)$をtの式に置換して、

そして$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ とすればtの積分に帰着します。

T：では一例をやってみましょう。

> $\int_C(x+y+z)ds$を求めよ。
> ただし、Cは、$x=1+t$, $y=2+t$, $z=3-t$（$0\leqq t\leqq1$）となる曲線。

どうですか。イメージはつかめますか。

K：ええと。まずCはどんな曲線なんでしょう。$t=0$のとき、$P(1, 2, 3)$、$t=1$のとき、$P(2, 3, 2)$そして、$x-1=y-2=-z+3$とおけるからこれは直線の方程式ですね。

つまり曲線Cとは、$(1, 2, 3)$と$(2, 3, 2)$を結ぶ線分ですね。

今その線分に沿って質点が動く。そこで$(x+y+z)$の積分を行うということですね。

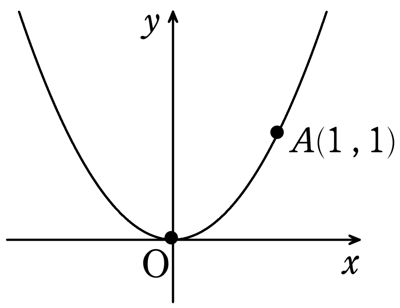
T：オーケーです。質点がCの各点でそのときの「x, y, z座標の値の和」を次々カウントしていくというカンジでしょうか。では計算はどうなりますか。

K：$ds=\sqrt{1+1+1}\,dt=\sqrt{3}\,dt$だから、

$\int_C(x+y+z)ds=\int_0^1(1+t+2+t+3-t)\sqrt{3}\,dt=\sqrt{3}\int_0^1(t+6)dt=\frac{13}{2}\sqrt{3}$ …答

T：ではもう一つやってみましょう。

$\int_C 32xy\,ds$ ただし、Cは図のような $y=x^2$ 上を原点から $A(1,1)$ まで動く



K：$x=t$, $y=t^2$ とパラメータで表します。$\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$

$ds=\sqrt{1+4t^2}\,dt$ よって、

$\int_C 32xy\,ds=32\int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}\,dt$

$u=\sqrt{1+4t^2}$ とおけば、$u^2=1+4t^2$　$\therefore 2u\,du=8t\,dt$

よって、

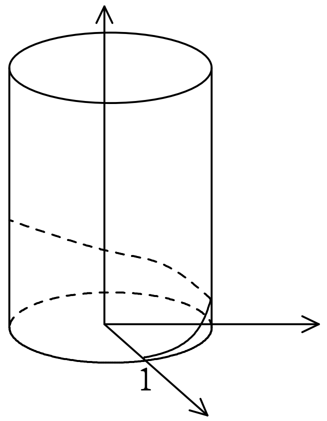
$$32\int_1^{\sqrt{5}} t^3u\,\frac{u}{4t}du=8\int_1^{\sqrt{5}} t^2u^2du=8\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{u^2-1}{4}\right)u^2du$$

$$=2\int_1^{\sqrt{5}}(u^4-u^2)du=2\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}=2\left(5\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{100\sqrt{5}+4}{15}$$ …答

■　ベクトル場での線積分

T：では今度は、ベクトル場での線積分を考えてみます。図のような円柱に巻き付いた曲線に沿って、質点を動かします。円柱らせんといって、ベクトルの式では、$C: cost\ \vec{i}+sint\ \vec{j}+t\vec{k}$ と表せます。



ここで、$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ は x , y , z 軸方向の単位ベクトルです。ベクトルの式でかくと図形がイメージしやすいと思います。

さて、今、C において、ある力 $\vec{F}$ が働いているときの線積分、$\int_C \vec{F}\cdot dr$ を考えてみることにしましょう。

K：ベクトル場での線積分はつねに $\int_C \vec{F}\cdot dr$ と決まっているのですか。例えば、

$\int_C \vec{F}\times dr$ といったものは無いのでしょうか。

Ｔ：いや、それもありだと思う。数学的にはいろいろな線積分を考えることができるでしょう。ただ、$\int_C \vec{F}\cdot dr$ という形式の線積分は「仕事」というひとつの物理量を表す式になっている、ということです。$\int_C \vec{F}\times dr$ も何か意味のある量かもしれませんし、あるいはそうでないかもしれません。ある自然現象や物理量を記述するために、数式や数学的な理論を形成するということは科学を行う上でもちろん非常に重要なことですが、一方そのようなこととは無関係に数学的に無矛盾である一つの体系を作ってみるということそれ自体も大切なことです。

Ｋ：アインシュタインの相対性理論に取り入れられた数学的理論は別にそのために考えられたものではなかったですよね。

Ｔ：そう。だから、数学は何かに「役立つために」あるのではなく、自由にいろいろな体系や法則を作り出していくその行動にこそ意味があるし尊いのではないかと思うんです。ちょっと脱線しましたね。ええと、では具体的にベクトル場での線積分を行ってみたいと思います。

$C:\vec{r}=cost\ \vec{i}+sint\ \vec{j}+t\vec{k}\quad (0\leqq t\leqq \pi)$

$\vec{F}=y\vec{i}-z\vec{j}+x\vec{k}$　としてみましょう。

ポイントは、$\int_C \vec{F}\cdot dr=\int_0^{\pi}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$　として t の式にもっていくことです。

$\frac{d\vec{r}}{dt}=-sint\,\vec{i}+cost\,\vec{j}+\vec{k}$　より、

$$\int_C \vec{F}\cdot dr=\int_0^{\pi}(sint\,\vec{i}-t\vec{j}+cost\,\vec{k})\cdot(-sint\,\vec{i}+cost\,\vec{j}+\vec{k})dt$$

$$=\int_0^{\pi}(-sin^2t-tcost+cost)dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-cost)dt-\int_0^{\pi}tcost\,dt+\int_0^{\pi}cost\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[t-sin\,t\Big]_0^{\pi}-\Big[tsint+cost\Big]_0^{\pi}+\Big[sint\Big]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\pi-(-1-1)=-\frac{1}{2}\pi+2$$

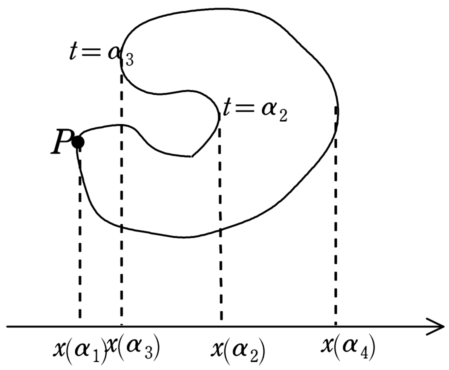
Ｔ：一応、線積分の話を終えたいと思います。かなりいいかげんで怪しげな話だったかもしれないので、専門書を読んでおいて下さい。
おまけとして、スカラー場での線積分と面積の話を追加しておきます。

■　スカラー場での線積分と面積

T：線積分は何も「左から右に流れている曲線」でなく、図のような閉じた曲線上を質点が動くとしてもいいのです。

K：閉曲線ですね。ジョルダン曲線といいますね。なぜ、ジョルダン曲線というんですか。

T：平面上に一つの閉曲線を描くと、平面は２つの部分に分かれますね。その１つ（閉曲線で囲まれた部分）は有界、もう１つは有界ではありません。この２つの領域のそれぞれの点を結ぶとき必ずこの曲線を横切らなければなりません。まあ、あたりまえのことなんですがとても難しい証明になるはずなんです。で、これをはじめて証明した $C.Jordan$ にちなんでつけられたのだと思います。さて、今この曲線上を P が半時計回り（正の向き）に動いているとします。



K：P の位置は、$y=f(x)$ という形ではかけないので、パラメータで表示されますね。

T：そうです。例えば、$x=x(t)\,,\,y=y(t)$ としておきましょう。今、P が $t=\alpha=\alpha_1$ から始まって、$t=\beta$ まで、閉曲線 C 上を一周するとします。そして、その各点で、x 軸までの距離を測って足し併せていくことにします。このとき閉曲線の内部の面積はどのように表されるでしょう。

K：ええと、上図のように４つの部分に分けて積分してみます。

①$\displaystyle\int_{x(\alpha_1)}^{x(\alpha_2)} y\,dx$、②$\displaystyle\int_{x(\alpha_2)}^{x(\alpha_3)} y\,dx$、③$\displaystyle\int_{x(\alpha_3)}^{x(\alpha_4)} y\,dx$、④$\displaystyle\int_{x(\alpha_4)}^{x(\beta)} y\,dx$

x の向きから考えて①は正、②は負、③は正、④は負。あっ。①＋②＋③＋④とすればうまいこと＋－が打ち消しあって、内部の面積になっています。

T：そうですね。ではこれらを置換積分してみましょう。

①　$\displaystyle\int_{x(\alpha_1)}^{x(\alpha_2)} y\,dx=-\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y(t)\,x'(t)\,dt$　（　$x=x(t)$ より、$dx=x'(t)\,dt$　）

x の向きと t の向きが逆になっていることに注意してください。

K：すると同様にして、

②　$\displaystyle\int_{x(\alpha_2)}^{x(\alpha_3)} y\,dx=-\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} y(t)\,x'(t)\,dt$　　③　$\displaystyle\int_{x(\alpha_3)}^{x(\alpha_4)} y\,dx=-\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} y(t)\,x'(t)\,dt$

④　$\displaystyle\int_{x(\alpha_4)}^{x(\beta)} y\,dx=-\int_{\alpha_4}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt$

となり、これを足し併せれば、$\displaystyle S=-\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt$　と求まりました。

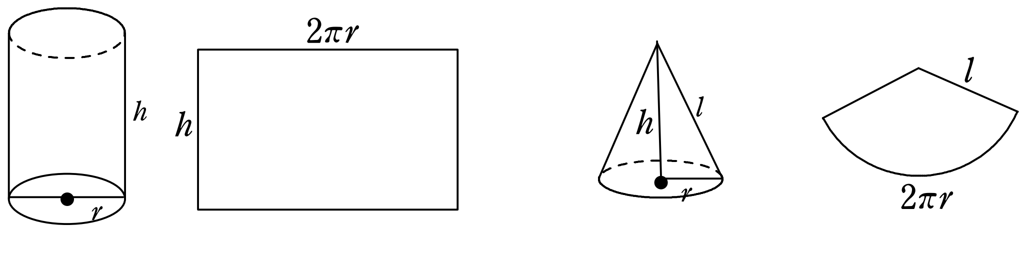
■　曲面積を求める

T：面積分の話の前に、曲面積の求め方をやっておきましょう。

K：高校では曲面積をやりませんね。難しいのかな。

T：いや。回転体の曲面積はそうでもないですね。では、回転体の曲面積の求め方をおさらいしておきましょう。まず、回転体で表面積はわかるものは何ですか。

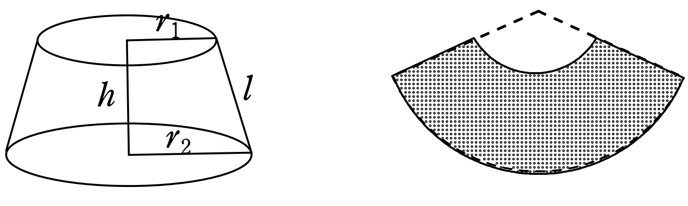
K：まず球ですね。$4\pi r^2$ となります。ちなみにこれを積分すると $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ となり球の体積になります。それから、円柱の表面積と円錐の表面積は中学校でやりました。



T：とりあえず側面積を求めて下さい。

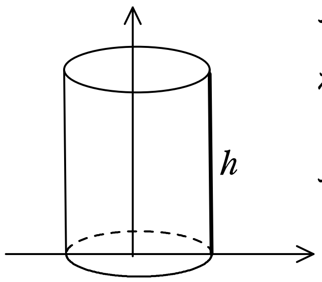
K：円柱は、展開すると長方形になりますから側面積は　$2\pi rh$ ですね。円錐は側面を展開すれば図のような扇形になりますから、$S:\pi l^2=2\pi r:2\pi l$ から、
$S=\pi rl$ となります。

T：円錐の高さを h とすると、$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ となりますね。では、ここで問題。
図のような円錐台の表面積はどうなるでしょう。



K：これは２つの円錐を考えて、差し引きするんですね。ちょっと面倒です。

T：なんかあまり計算したくないですね。しかし、これから回転体の表面積を考える場合実は、この円錐台の表面積が基本になりますので求めておきましょう。
うまい手段があります。パップスギュルダンの定理のような考えを使うのです。

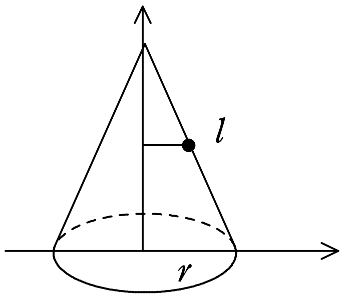


つまり、図の円柱の側面積は、長さ h の線分が、 y 軸のまわりに一回転していると考えれば、

　表面積＝h×(h の重心の移動距離)　と見ることができます。h の重心は中点なので、その移動距離は $2\pi r$ですから、

　　表面積＝$2\pi rl$ と求まります。

K：なるほど。すると、円錐は図のように、長さ l の棒の重心の移動距離を見ればいいのですね。

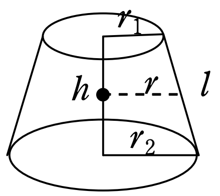


表面積$=l\times 2\pi\cdot\dfrac{1}{2}r=\pi rl$　簡単に求まりました。

すると、円錐台の表面積は、長さ l の棒の移動距離は

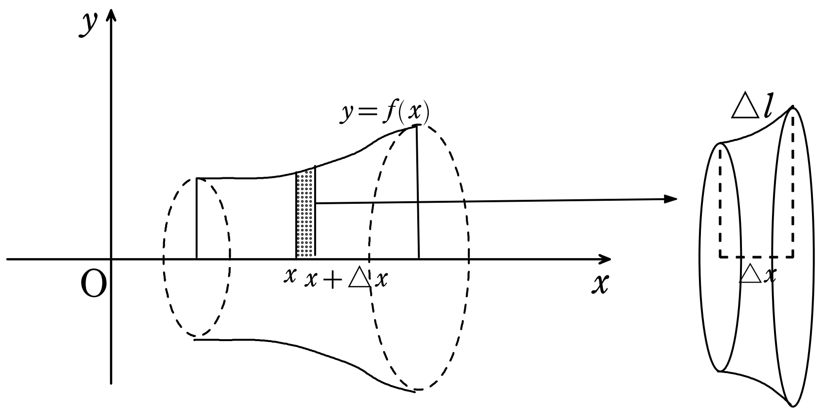
棒の重心と回転軸との距離が $r=\dfrac{r_1+r_2}{2}$ ですから、

表面積$=2\pi\left(\dfrac{r_1+r_2}{2}\right)l=\pi(r_1+r_2)l$　となるわけですね。



T：そうですね。尚、円錐台の表面積 $\pi(r_1+r_2)l$ において、 $r_1=0$ とすれば円錐の表面積になり、$r_1=r_2$ とすれば円柱の表面積になることを確認しておいてください。

さあ。ではいよいよ一般の回転体の表面積を考えましょう。



今、 $y=f(x)$ を a から b まで、 x 軸のまわりに 1 回転させたときの表面積を考えましょう。左図の微小部分の回転体の表面積を $\triangle S$ とします（右図）。この微小図形は円錐台と見ることができます。

K：円柱とは見ないのですね。

T：曲がり具合で表面積が決まってくるので円柱と見ればまずいですね。

さきほど求めた公式から、

$$\triangle S=\pi(f(x)+f(x+\triangle x))\triangle l$$

ここで、$\triangle l=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle f)^2}$ ですから、

$$\triangle S=\pi(f(x)+f(x+\triangle x))\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle f)^2}=\pi(f(x)+f(x+\triangle x))\sqrt{1+\left(\frac{\triangle f}{\triangle x}\right)^2}\ \triangle x$$

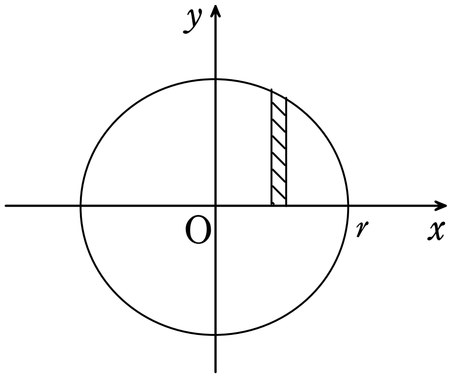
ここで、$\triangle x\to 0$ として、dS と dx の関係式を作ると、

$dS=\pi\cdot 2f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ とできますから、表面積は、

$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ と求まりました。

K：なかなかきれいな式ですね。

T：それではいくつか回転体の表面積を求める練習をしましょう。まず、球の表面積を求めてみましょう。



$x^2+y^2=r^2$ から、$y=\sqrt{r^2-x^2}$ として、

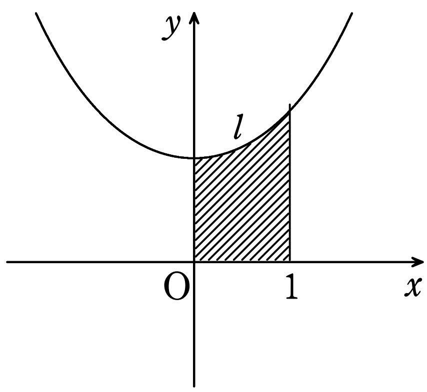
$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ より計算すればいいですね。

K：$S=2\pi\int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$

$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\dfrac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx=2\pi\Big[rx\Big]_{-r}^{r}=4\pi r^2$

うまく求まりました。

T：ではもうひとつくらいやってみましょうか。



カテナリー $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の回転体の表面積を求めてみましょう。

K：これは双曲線関数を使った方が早いですね。

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=cosh\ x$ とすると、$f'(x)=sinh\ x$、$1+sinh^2x=cosh^2x$ を用いて、

$S=2\pi\int_0^1 cosh^2\,x\,dx$ となります。ここで、$cosh^2x=\dfrac{cosh\ 2x+1}{2}$ なので、

$S=\pi\int_0^1(cosh\ 2x+1)dx=\left[\dfrac{1}{2}sinh\ 2x+x\right]_0^1=\left[\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}+x\right]_0^1$

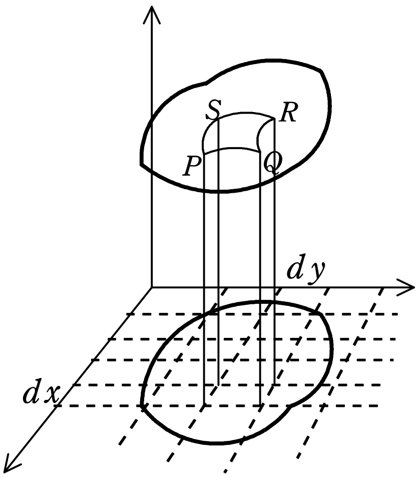
$=\dfrac{e^2-e^{-2}}{4}+1=\dfrac{1}{4}(e^2-e^{-2}+4)$

T：カテナリ曲線の特徴として、図の斜線部分の面積と、その上の曲線の長さ l が等しいことがあげられますが、今求めた表面積を見ると、回転体の体積の２倍になっていることがいえますね。

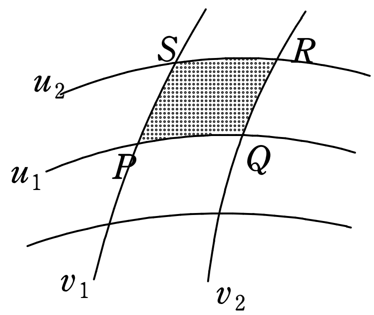
K：回転体の体積は、$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 cosh^2x\,dx$ なので確かにそうですね。面白い。

T：では、そろそろ本題の面積分の話に入っていきましょう。

ここまで考えてきた回転体の表面積ではなく、図のような xyz 空間のある曲面の面積を考えてみることにします。



考え方は、以前ヤコビアンの話をしたときと似たようなものです。



K：図の微小面積 $PQRS$ を平行四辺形と見るんですね。

T：そうです。曲面 S 上の点がパラメータ u , v によって、$(x(u,v)\,,\,y(u,v)\,,\,z(u,v))$ とあらわされているとします。そして、xy 平面上の単位正方形 $dxdy$ が曲面上の微小面積 $PQRS$ に対応しています。

ここで、極限を考えて、$\overrightarrow{PQ}=(x_udu\,,\,y_udu\,,\,z_udu)$、$\overrightarrow{PS}=(x_vdv\,,\,y_vdv\,,\,z_vdv)$ と見るわけです。これはヤコビアンのときの話と同じですね。

K：すると、微小図形の面積 $PQRS$ を平行四辺形と見れば、その面積は、ベクトルの外積の形でかけば、$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|$ ですね。

T：成分で $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}$ を表すと、$\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}\,,\,\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}\,,\,\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right)dudv$ とヤコビアンで表すことができますね。

K：ヤコビアンの表記法から、$\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$ ともかけますね。

このベクトルの大きさが面積なので、

$$dS=\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dudv \quad \cdots ※$$

Ｔ：これを領域内でぐるっと積分すればいいので、領域 D 内での曲面積は、

$\int_D\int\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}dudv$ となりました。

※の式は、面積要素といって、線積分のときにでてきた線素と同じようなものです。

もう少しこの式を変形して見やすくしてみることにしましょう。

■　面積要素と曲面の第一基本量

Ｔ：前回は、面積要素、$dS=\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dudv$　…※

から、曲面積　$\int_D\int\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}dudv$ を示しましたね。

$\overrightarrow{PQ}=(x_udu\,,\,y_udu\,,\,z_udu)=(x_u,y_u,z_u)du$　、$\overrightarrow{PS}=(x_vdv\,,\,y_vdv\,,\,z_vdv)=(x_v,y_v,z_v)dv$

なので、２つのベクトル、$\vec{a}=(x_u\,,\,y_u\,,\,z_u)$, $\vec{b}=(x_v\,,\,y_v\,,\,z_v)$ の外積を考えてみます。

さて、このとき、$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ となることはいいでしょうか。

Ｋ：ええと。平面のベクトルでは平行四辺形の面積を求めるときにこの式がでてきますよね。空間の場合はこれが平行六面体の体積ですね。ではちょっと示してみましょう。

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(x_u{}^2+y_u{}^2+z_u{}^2)(x_v{}^2+y_v{}^2+z_v{}^2)-(x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v)^2$

$=(y_u{}^2z_v{}^2+z_u{}^2y_v{}^2-2y_uy_vz_uz_v)+(z_u{}^2x_v{}^2+x_u{}^2z_v{}^2-2z_uz_vx_ux_v)+(x_u{}^2y_v{}^2+y_u{}^2x_v{}^2-2x_ux_vy_uy_v)$

$=\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}^2$　示しました。

Ｔ：ところで、曲面上の点 P をベクトルで表すと、$\vec{r}=(x(u,v)\,,\,y(u,v)\,,\,z(u,v))$ でしたから、$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,,\frac{\partial y}{\partial u}\,,\frac{\partial z}{\partial u}\right)$　$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\,,\frac{\partial y}{\partial v}\,,\frac{\partial z}{\partial v}\right)$ とかけますね。

今、$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|^2=E$　$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|^2=G$　$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=F$ とおきます。

これを曲面の第一基本量といいます。これを用いれば、※の面積要素の式は、

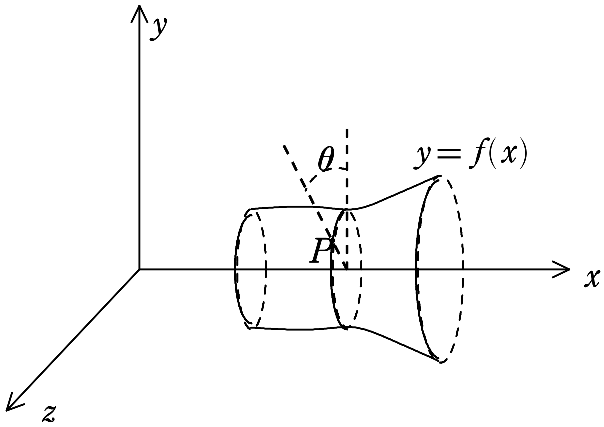
$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ と表せます。

Ｋ：すると、曲面積は、$S=\int_D\int\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ となるわけですね。

この式から回転体の表面積にもっていくことはできますか。

Ｔ：できますね。例えば、図のように xyz 空間を考えて、 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに回転させるとすると、その曲面上の点 P は、回転角をθとすると、

$(x\,,\,f(x)cos\theta\,,\,f(x)sin\theta)$ と表せますね。このベクトルを$\vec{r}$とすると、



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}=(1\,,\,f'(x)cos\theta\,,\,f'(x)sin\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}=(0\,,\,-f(x)sin\theta\,,\,f(x)cos\theta)$$

となりますから、

$E=1+\{f'(x)\}^2$, $G=\{f(x)\}^2$

$F=0$ から

$dS=f(x)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dxd\theta$ となり

前回の回転体の表面積の式が得られます。

K：この曲面の微小部分 dS にある関数なり力なりを及ぼして面積分を行うわけですね。

T：そうです。スカラー場での面積分は、

$\int_D\int f(x,y,z)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ と表されます。ここで、x, y, z はパラメータ $u\,,v$ で表される点の座標ですね。

K：$\int_D\int f(x,y,z)\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\,dudv$ ともかけるのですね。ところで、曲面はベクトルではないのに、面積分にもベクトル場での積分というのがあるのですか。

T：あるのです。そのためには、面積要素に向きづけが必要になりますね。

K：曲線の場合はその接線を考えれば向き付けが可能ですが、曲面の向き付けはやはり法線ベクトルの向きということになるのでしょうか。

T：そうですね。つまり平面上の $\vec{r}$ に対して、$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ がその点における曲面の向きなわけです。裏表のない曲面なんかだと問題がありますが、ここでは表裏のある曲面ということで考えてください。

K：つまり閉曲面などですね。

T：ベクトル場での面積分は、法線単位ベクトルを $\vec{n}=\dfrac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$ として、

$\int_D\int \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ をベクトル場 $\vec{F}$ の向き付けされた曲面 S における面積分といいます。

K：すると、$dS=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|dudv$ でしたから、

$\int_D\int \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_D\int \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)dudv$ と表すことができますね。

Ｔ：具体的な問題をやってみますか。スカラー場での面積分を考えてみます。

例えば、$\int_C\int xyz\, dS$ ただし $C: x+y+z=1, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ なんていうのはどうでしょう。

Ｋ：$C: x+y+z=1, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ は平面の方程式ですね。これを u, v で表すには？

Ｔ：$x=u, y=v$, として、z を u,v で表せばいいでしょう。

Ｋ：なるほど。すると、$\vec{r}=(u, v, 1-u-v)$ となるので、$\overrightarrow{r_u}=(1,0,-1), \overrightarrow{r_v}=(0,1,-1)$ から $E=2, G=2, F=1$ 。$\therefore dS=\sqrt{3}\, dudv$ あとは u, v の２重積分になって求まりますね。

（2003年　2月）