2011年センター試験を振り返って

八戸西高　下町壽男

1　はじめに

論語に「知之者不如好之者，好之者不如楽之者」（之を知る者は之を好む者に如かず，之を好む者は之を楽しむものに如かず）という一節がある．孔子のこの言葉はまさに至言であり，「学び」に関して普遍的真実であると私は思う．

さて，今年もセンター試験が終わった．結果を見ると，授業や数学を楽しんでいる生徒の成績はやはり良かった．「量をこなす」「パターンを徹底して覚える」「同じ問題を何度も繰り返す」という勉強法の目指すものは「得点を上げること」であり，決して「数学がわかること」ではない．「数学がわかること」を切り捨てた「数学の勉強」は時間をかけたわりには「得点を上げること」にも繋がるとは言い難いというのが私の持論である．

意中の彼女に自分の気持ちを伝えるには，彼女のことをよく知り深く愛することだ．そうすることによって，女神はほほ笑んでくれるかもしれない．数学の勉強もこれと似ている．

前置きが長くなったが，今回の試験を振り返り，センター試験の問題点を指摘しつつも，問題の背景などを楽しむ視点で論述してみようと思う．

2　数学ⅡB数列より

＜前半部分の問題＞

数直線上で点Pに実数 a が対応しているとき，a をPの座標といい，座標が a である点Pを $P(a)$で表す．数直線上に点 $P_1(1)$, $P_2(2)$ をとる．線分P_1P_2 を３：１に内分する点を P_3 とする．一般に，自然数 n に対して，線分 P_nP_{n+1} を３：１に内分する点を P_{n+2} とする．点 P_n の座標を x_n とする．

$x_1=1$, $x_2=2$ であり，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．数列 x_n の一般項を求めるために，

この数列の階差数列を考えよう．自然数 n に対して，$y_n=x_{n+1}-x_n$ とする．

$y_1=\boxed{\text{ウ}}$　　$y_{n+1}=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}y_n$　（$n=1, 2, 3, 4, \cdots$）である．

したがって，$y_n=\left(\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{キ}}}$　（$n=1, 2, 3, 4, \cdots$）であり

$x_n=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{サ}}}$　（$n=1, 2, 3, \cdots$）

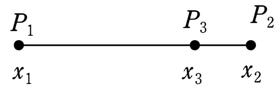
となる．ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ については当てはまるものを，次の０から３のうちから一つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい

０　$n-1$　　１　n　　２　$n+1$　　３　$n+2$

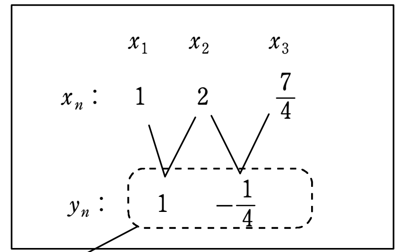
● **解答の実況中継**

なんかいろいろ書いてあるぞ．面倒そうだ．登場する数列は x_n, y_n の２種類だな．待てよ，$y_{n+1}=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}y_n$ となっているから，y_n は等比数列じゃんか．y_n がわかれば，階差数列の公式　$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k$ でお終いだ！　よし，ここは書き上げ作戦だ．

解答



$x_3=\dfrac{3x_2+x_1}{3+1}=\dfrac{7}{4}$　答



ふふふ．項３つで十分だ．

y_n は初項１公比は$-\dfrac{1}{4}$ の等比数列だな．　よって　$y_n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　簡単に求まったな．答

すると　$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=1+\dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{9}{5}-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　答

ここまでマークの時間も入れて３分だ．結構うまくいったぞ．

この解答は邪道であり，数学的に不完全といわれるであろう．しかしこの問題を一見して，漸化式からy_nを等比数列と見抜くこと，x_n と y_n の関係から階差数列の公式を用いると見抜くことは，数学と余裕を持って接してきた生徒にこそ容易であろう．

また，「すべての自然数で成り立つ」ならば「ある自然数でも成り立つ」という論理から，$n=1, 2, 3$ とすれば，センター試験の穴埋めとしては十分性も担保した解になっていることがわかった上で解答を作ることは非難されることではない．

つまり，特にセンターの問題を解くのに，その問題固有の数学的認知の他に，「数学的メタ認知」とも言うべきものを有していることが武器となるのではないか．

● **隣接３項間漸化式から一般項を導く**

一般的な解法は次のようになるだろう．

解答　条件より　$x_{n+2}=\dfrac{3x_{n+1}+x_n}{3+1}$

よって　$4x_{n+2}=3x_{n+1}+x_n$ という隣接３項間漸化式を得る．この式より

$4(x_{n+2}-x_{n+1})=-(x_{n+1}-x_n)$　よって，　$y_{n+1}=-\dfrac{1}{4}y_n$　（以下略）

この解法のポイントは隣接３項間漸化式の変形である．

一般に，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ において，特性方程式 $x^2-px-q=0$ の解をαとβとしたとき， $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と表される．

この手法を使えば，次のように解答することもできる．

解答　特性方程式 $4x^2-3x-1=0$ より $x=1\,,-\dfrac{1}{4}$

よって漸化式は次のように変形できる．

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)\quad\cdots\cdots①$$

$$x_{n+2}+\frac{1}{4}x_{n+1}=x_{n+1}+\frac{1}{4}x_n\quad\cdots\cdots②$$

センター試験では①から階差数列に誘導していく形になっているが，この方法は，特性方程式の解に１が含まれているときだけに有効なので，普通は次のように解く．

①より $x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdots\cdots①'$

②より $x_{n+1}+\dfrac{1}{4}x_n=\left(x_2+\dfrac{1}{4}x_1\right)1^{n-1}=\dfrac{9}{4}\quad\cdots\cdots②'$

ここで，②'－①'とすれば $-\dfrac{5}{4}x_n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}-\dfrac{9}{4}$

よって $x_n=\dfrac{9}{5}-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ 答

ただ，今回の問題で$y_n=x_{n+1}-x_n$ としたのは別の意図が感じられる．それは後述する．

● 隣接３項間漸化式のもうひとつのアプローチ

漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ （※） において，特性方程式 $x^2-px-q=0$ の意味を次のように考えることもできる．

漸化式※の１つの解として，$a_n=r^n$ が考えられるので，代入すると，

$r^{n+1}=pr^{n+1}+qr^n$ すなわち $r^2-pr-q=0$ を満たす r に対して漸化式※は成立する．この方程式が異なる２つの解 $\alpha\,,\beta$ を持つ時，一般解の集合は $\alpha^n\,,\beta^n$ を基底とする線形空間を構成するので，一般解は $a_n=k\alpha^n+l\beta^n$ とおける．

この手法で解いてみよう．

解答　特性方程式 $4x^2-3x-1=0$ より $x=1\,,-\dfrac{1}{4}$

よって，$x_n=k\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+l$ とおける．$x_1=1\,,x_2=2$ より

$k+l=1\,,\ -\dfrac{1}{4}k+l=2$ これを解いて $k=-\dfrac{4}{5}\,,l=\dfrac{9}{5}$

よって $x_n=\dfrac{9}{5}-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ 答

＜後半部分の問題＞

次に，自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_n|$ を求めよう．$r=\left|\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right|$ とおくと

$$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{\boxed{\text{シ}}}r^{k-1}-nr^{\boxed{\text{ス}}}\quad(n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$$ であり，したがって

$$S_n=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left\{1-\left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}\right\}-\frac{n}{\boxed{\text{テ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる．ただし，$\boxed{\text{シ}}$ $\boxed{\text{ス}}$ $\boxed{\text{ツ}}$ $\boxed{\text{ナ}}$ については当てはまるものを次の０～３のうちから一つずつを選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

０ $n-1$　　１ n　　２ $n+1$　　３ $n+2$

● 解答の実況中継

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_n|$ か．$r=-\dfrac{1}{4}$ だったから $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

なあんだ，これはただの（等差）×（等比）型の和の問題じゃんか．

これは「$S-rS$ 法」で解けば良かった．

$$S=1+2\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{4}S=\quad 1\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\frac{3}{4}S=\underbrace{1+1\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}_{\bigstar}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ここで★部分は初項１公比$\dfrac{1}{4}$ の等比数列の和だから，まず解答にあわせてΣで表すと

$\dfrac{3}{4}S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ すなわち $S_n=\dfrac{4}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 答

あとは第１項のΣの部分を計算して

$$S_n=\frac{4}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$ 答

一見難しそうな顔をしていた問題だけれど，ホント授業でやってきたことだったな．

● オマケの話

$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ 　を数Ⅲの手法で求めてみる．

両辺を x で不定積分して

$$\int S\,dx=x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+C=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+C$$

これを微分して

$$S=\frac{\{1-(n+1)x^n\}(1-x)-(x-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

● この問題の意図するところ

今回の数列の問題は，一見難しそうに見えるが，実際は「階差数列から一般項」「等差×等比型数列の和」という典型的な問題であった．最近のセンター試験の問題を見ると，誘導や解説が多く，それに惑わされて難しく感じてしまう生徒が多いのが実情であろう．もう少しわかりやすく作題してもらえないものかとは思うが，作題者にしてみればそこは譲れないところかもしれない．

それは，作題者は単に計算問題を作るのではなく問題の背景や意図も示しておきたいからだと思われる．この問題は閉区間における区間縮小法を意図して作られている．だから，漸化式を作ったり階差数列から一般項を求めることは，単に問題のための問題ではなく，その背景として大学で学ぶ実数論への関わりを示唆している．つまり作題者の心意気というわけだろう．

では，作題者の視点に立ってこの問題を見直してみよう

有界閉区間　$I_0=[1,2]$　に対して，$\{x_n\}$ を作っていく操作は I_0 の縮小列を作っていくことに他ならない．

すなわち，　$I_1=\left[\frac{7}{4},2\right]$　$I_2=\left[\frac{7}{4},\frac{29}{16}\right]$ ……　において

$I_0\supseteqq I_1\supseteqq I_2\supseteqq I_3\supseteqq\cdots\cdots\cdots$　を満たしている．

ここで$|y_n|$ は区間の幅$|x_{n+1}-x_n|$ を表していて，$y_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　なので　$\lim_{n\to\infty}|y_n|=0$

このように，縮小列の幅が０に収束するとき，区間I_n に属する点（実数）がただ一つ存在する．これが「区間縮小法」の原理である．だから，隣接３項間漸化式から一般項を求める手段としてy_n を登場させたのではなく,区間縮小法の中で区間の幅を定義する重要な数列だったのである．

今回の問題では　$x_n=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　となるので，$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{9}{5}$ に収束する，つまりすべてのI_nに属する点は $x=\frac{9}{5}$ に限ることがわかる．

この区間縮小法の原理から，有界閉区間のコンパクト性，実数の連続性を示すことへ発展していく．そういう意味でこの問題は数学的に非常に重要な概念を意図して作られている。と考えることにしておこう．

3　数学ⅡBコンピュータ（第6問）より

殆どの生徒はコンピュータの分野は手をつけないが，センター終了後，T君とO君がコンピュータの問題を選択して完答したとの報告をしてくれた．

この問題の前段の部分（プログラミングの前）を見てみよう．

＜前半部分の問題＞

n を２以上の自然数とし，以下の操作を考える．

（ｉ）　n が偶数ならば，　n を２で割る

（ii）　n が奇数ならば，　n を３倍して１を加える

与えられた２以上の自然数にこの操作を行い，得られた自然数が１でなければ，得られた自然数にこの操作を繰り返す．２以上10^5 以下の自然数から始めると，この操作を何回か繰り返すことで必ず１が得られることが確かめられている．

たとえば１０から始めると

10→5→16→8→4→2→1

である．ただし，$a\to b$ は1回の操作で自然数 a から自然数 b が得られたことを意味する．

N を２以上10^5 以下の自然数とするとき，$F(N)$ をNから始めて１が得られるまでの上記の操作の回数と定義する．また $F(1)=0$ とおく．たとえば上の例から $F(10)=6$ である．

(1)　$F(6)=\boxed{\text{ア}}$　　$F(11)=\boxed{\text{イウ}}$　である．

なんと！「コラッツの予想」からの出題である．「偶数ならば２で割る，奇数ならば３倍して１を加える」操作を継続するとすべての自然数は１に収束するというのが「コラッツの予想」であり，予想といわれるようにこれは未だに証明されていない．

コラッツとはドイツの数学者の名前である．私もこのコラッツ予想にハマってかなり深く研究したことがある．残念ながら証明することはできなかった．巷の数学を趣味にする人たちから「私が証明した」という声が聞かれるが（実際私も，証明したという人からレポート２０枚位の証明を受け取ったことがある）どこかで勘違いしているようである．

解答

6→3→10→5→16→8→4→2→1　　より　$F(6)=8$　答

11→34→17→52→26→13→40→20→10→5→16→8→4→2→1　より　$F(11)=14$　答

この操作では奇数になった後は必ず偶数になるので，２回に1回以上は必ず２で割ることになるので,確率的に考えれば縮小されて１に行くのはあたりまえのようにも思える．

しかし，例えば奇数のとき「3倍して１を引く」という操作にすると

5→14→7→20→10→5　となりサイクリック（周期的）になってしまう．

コラッツの予想は小学生･中学生でも考えられる身近な問題だが数論の非常に深い内容を孕んでいる．こんな話題に関心を持ち，数学を楽しむ生徒がでてきてくれれるような授業を行いたいものである．

3　数学ＩＡ　確率の問題（第４問）

＜前半部分の問題＞

1個のさいころを投げるとき，４以下の目が出る確率 p は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり

５以上の目が出る確率 q は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

以下では，１個のさいころを８回繰り返して投げる．

(1)　8回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率は $\boxed{オカ}\,p^3q^5$ である．

第1回目に4以下の目が出て，更に次の7回の中で4以下の目がちょうど２回出る確率は $\boxed{キク}\,p^3q^5$ である．

第１回目に５以上の目が出て，更に次の７回の中で４以下の目がちょうど３回出る確率は $\boxed{ケコ}\,p^3q^5$ である．

(2)　次の０～７のうち $\boxed{オカ}$ に等しいものは $\boxed{サ}$ と $\boxed{シ}$ である．

ただし $\boxed{サ}$ と $\boxed{シ}$ は解答の順序は問わない．

0　${}_7C_2\times{}_7C_3$　1　${}_8C_1\times{}_8C_2$　2　${}_7C_2+{}_7C_3$　3　${}_8C_1+{}_8C_2$
4　${}_7C_4\times{}_7C_5$　5　${}_8C_6\times{}_8C_7$　6　${}_7C_4+{}_7C_5$　7　${}_8C_6+{}_8C_7$

受験後に生徒から「パスカルの三角形が出ました」との報告を受けた．
今回の確率の問題の前段は，コンビネーションに関する公式

${}_0C_0$
${}_1C_0\ {}_1C_1$
${}_2C_0\ {}_2C_1\ {}_2C_2$
${}_3C_0\ {}_3C_1\ {}_3C_2\ {}_3C_3$
${}_4C_0\ {}_4C_1\ {}_4C_2\ {}_4C_3\ {}_4C_4$
${}_5C_0\ {}_5C_1\ {}_5C_2\ {}_5C_3\ {}_5C_4\ {}_5C_5$
${}_6C_0\ {}_6C_1\ {}_6C_2\ {}_6C_3\ {}_6C_4\ {}_6C_5\ {}_6C_6$
${}_7C_0\ {}_7C_1\ {}_7C_2\ {}_7C_3\ {}_7C_4\ {}_7C_5\ {}_7C_6\ {}_7C_7$
${}_8C_0\ {}_8C_1\ {}_8C_2\ {}_8C_3\ {}_8C_4\ {}_8C_5\ {}_8C_6\ {}_8C_7\ {}_8C_8$

パスカルの三角形

${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$　を，これでもかというほど懇切丁寧に説明してくれている．この公式の証明は，代数的に行うよりも，特定の1個に着目して，それが選ばれる場合と選ばれない場合に分けて考えることで容易に示すことができる．問題の流れはそのように誘導されている．

この公式はいわばパスカルの三角形の生成過程がコンビネーションを生み出す原理になっていることを示すものである．

作題者とすれば，$(p+q)^8$ の二項の展開式を作ることで確率分布（二項分布）が得られることをこの問題を通して示したかったのだろうと思う．ただ，実際は，０～７の値を計算して求めた受験生が大半だと思われる．

さて，特にこの問題に関わってということではないが，今回は数式等の「読み方」について最近気になっていることを述べてみたい．

${}_nC_r$ は通常「Cのエヌアール」と読むか「エヌCアール」と読むかいずれかである．

特に年配の方は，かつて ${}_nC_r$ を $\dbinom{n}{r}$ と表していたこともあり，前者の読み方にこだわりを持つようである．

また，f' を「エフダッシ」と読むと目くじらを立てる人もいる．「エフプライム」でなければだめなそうだ．私は「ダッシュ」だろうが「プライム」だろうが，「Cのエヌアール」であろうが「エヌCアール」だろうがどちらでもいい派である．

${}_nC_r$ に話を戻そう．確かに英語読みでは正式には「*Combination of n things r at a time*」（*Combination of n taken r* などとも言われる）だろうが，今回の ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ ような公式をを述べる際は「Cのエヌマイナスイチアールマイナスイチ　たす　Cのエヌマイナスイチアール」と読むのはわかりにくい．ここでは普通「エヌマイナスイチCアール…」と読むところだろう．

以前国際会議で数論の分科会に出たとき欧米人の数学者も「エヌCアール」といっていたし，例えば　$n!$ をコンビネーションのように「階乗の n 」というのも不自然である．（因みに $n!$ は *factorial of n* よりも今は *n factorial* が普通である！）

私は，現在は「エヌCアール」と呼ぶことにしている．また，$\overrightarrow{AB}$ は，かつては「ベクトルAB」と言っていたが，今は「ABベクトル」で統一した．理由はどちらも「手の運動と読み方を一致させる」ことからである．このような考えに至ったのはセンター試験の影響も多少はあると思う．まあどちらかといえばネガティブな理由ではあるけれど．

そこで，気になることがある．それはセンター試験における分数の回答欄である．

例えば　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ というようになっているが，分子の方を分母より先に書かなければならない．日本人であれば，どうしても分母を先に言ってしまうだろう．３分の２といいながらマークすると分母分子を逆に書いてしまいそうだ．

英語では $\dfrac{2}{3}$ を $2\ over\ 3$ というのでそれにならっているのだろうか．ということは日本以外では分子を先に書いてしまうのかなあ．少し悩むところではある．

（　しもまちひさお／2011年　1月19日）