2010年センター試験を振り返って①

～はたしてセンター試験は数学を学ぶものをEncourageしているのかという立場からの批判的考察～

八戸西高校　下町壽男

「センター試験は壮大な虫食い算である」といった人がいる。つまり解答の一部が与えられているので、解答の必要十分性を考えなくてもよいのである。例えば「すべての値で成り立つ」という表現があった場合、「すべての値で成り立つ」$\Longrightarrow$「ある値でも成り立つ」（逆は成り立たない）ということから、具体的な数値を代入して早回りして解答だけゲットできるということがしばしば起きる。

以前センター試験で次のような問題が出題されたことがある。

$xyz=1$, $x+\dfrac{1}{x}=a$, $y+\dfrac{1}{y}=b$, $z+\dfrac{1}{z}=c$　のとき、$a^2+b^2+c^2-abc=\boxed{\text{ア}}$である。

x , y , z の値にかかわらず、$a^2+b^2+c^2-abc=\boxed{\text{ア}}$が成り立つということなので、$xyz=1$ から、特殊な値、$x=y=z=1$ を見つければ、$a=b=c=2$ となり、

$a^2+b^2+c^2-abc=4+4+4-8=4$ とあっという間に終わる。

このような解答は「是」なのか。この問題ははたして数学の力を測る良問といえるのか。

普通に同値変形をしながら時間をかけてようやく解答に辿り着いた生徒は「センター試験数学」から見れば「負け組みの答案」ということになるのだろうか。一度作題者に聞いてみたいものである。

では、2010年のセンター試験数学ⅡBの問題を眺めてみよう。

【数学ⅡB　3　（数列）】

自然数列の列 $1,2,3,4,\cdots$を次のような群に分ける。

$1\ |\ 2,3,4,5\ |\ 6,7,8,9,10,11,12\ |\ \cdots$

第1群　第2群　第3群

ここで、一般に第 n 群は$(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1)　$a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=12$, $a_4=\boxed{\text{アイ}}$　である。

$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}n-\boxed{\text{エ}}$　$(n=2,3,4)$

が成り立ち

$a_n=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}n$　$(n=1,2,3,\cdots)$ である。

この問題の流れを解釈すると、「n 群の最後の項$-(n-1)$群の最後の項$=n$ 群の項の数」から$a_n-a_{n-1}=3n-2$ を出させ、そこから項の番号を上げて$a_{n+1}-a_n=3n+1$ を作り階差数列の公式からa_n を導かせるというものだろう。しかし、最初にa_4 を計算させているので、受験生は次のように「誘導」される。

まず書上げにより、$a_4=22$ がわかり、$1,5,12,22$。この階差をとると、$4,7,10$ となり初項4、公差3の等差数列と<u>類推</u>されるので、a_n-a_{n-1} を経ずに a_n が導かれる（つまり多くの受験生いとっては、a_n-a_{n-1} はむしろミスディレクションといえる）。結果十分性が確保されない正解ができあがる。

私は、このような群数列の問題に対しては「いくつかの項を拾って類推」ではなく「n 群までの項の個数を考える」ことを柱とすべきであると考える。

つまり、a_n を出させるのなら、普通は次のような流れで考えるべきだ。

第 n 群までの項の個数は、$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(1+3n-2)=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$

これは a_n と一致するので、$a_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$　（オカキクケが決定）

これなら、この問題のように「項の番号と項の値が一致している」特別な場合でなくても解くことができし、何もa_n-a_{n-1} を経由し階差数列に持っていく必要はなく簡単に終わる。

例えば、　$1\ |\ 3,5,7,9\ |\ 11,13,15,17,19,21,23\ |\ \cdots$　という問題だったら、n 群までの項の個数は$\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$ で、群を取り去った数列の第k 項をb_k とすると、$b_k=2k-1$ なので、

$a_n=2\left(\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n\right)-1=3n^2-n-1$　と簡単に求められる。

ところで、階差数列が n の一次式であることから、a_n は2次式であることがわかる。すると、ローカルな範囲での類推を是とすれば、次のように解答してもよい。

$a_n=pn^2+qn$　とおくと、$a_1=1$, $a_2=5$ から、$\begin{cases}p+q=1\\4p+2q=5\end{cases}$

これを解いて、$p=\dfrac{3}{2}$, $q=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ a_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$

センター試験ではこんな本末転倒な解法もアリなわけである。

更に(2)を見てみよう

(2)　$n=1,2,3,\cdots$ に対し、第$(n+1)$群の小さい方から$2n$ 番目の項を b_n で表すと

$b_n=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$　であり、$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$

こうなると、最早マトモに解こうという気がしない。

$\dfrac{1}{b_n}$ の形からb_n は2次式と察しがつくので、$b_n=pn^2+qn$　とおく。

$n=1$ のとき、第２群の小さい方から2番目の項は３なので　$b_1=3$

$n=2$ のとき、第３群の小さい方から４番目の項は９なので　$b_2=9$

このことから、$\begin{cases}p+q=3\\4p+2q=9\end{cases}$　$p=q=\dfrac{3}{2}$　つまり　$b_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$　答

よって　$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{3n(n+1)}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$　答

昨年退官した東北大学理学部数学科教授の森田康夫先生は、東北大学においてセンター試験の得点と個別学力試験の得点には相関がないことを、緻密なデータ分析から鮮やかに検証して見せた。

センター試験における数学は、確かに受験生を選別する偉大なる科目として君臨している。しかし皮肉にも生徒の数学の力を測るモノサシにはなっていない。

2010年センター試験を振り返って②

～数ⅡB　空間ベクトルの問題を座標を入れて解いてみる～

八戸西高校　下町壽男

空間ベクトルでは、四面体の問題がオーソドックスである。なぜなら、空間上に異なる3点がある場合、その3点で一つの平面が決定される（空間の結合公理）から、四面体というのは「同一平面上にない異なる4点」と同値で、この4点が空間を構成するベースとなるからである。つまり、３つの基底ベクトルによって張られるのが空間であり、だから自然と四面体が意識される。

今回の問題は平行六面体であるが、何か奇を衒（てら）おうとしている意図が見える。普通に四面体の問題にして欲しかったというのが率直な感想。

例えば、直方体がテーマになっている場合は利点がある。一つは３つの基底が直交している（直交系）なので、内積の計算が楽になるということ。もう一つは、計量空間として「座標を入れる」ことができるということである。

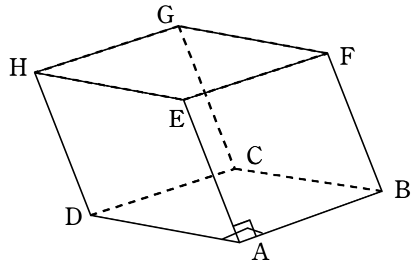
そういう意味で平行六面体は一番やっかいである。ただし、２つのベクトルが直交していること、各辺の長さが１と「正規化」されていることから計算の煩雑さが回避されている。

では、その利便性に着目して今回の問題を敢えて座標空間で考えてみよう。

【数学ⅡB　4　（ベクトル）】

平行六面体$ABCD-EFGH$があり、$\angle EAB=\angle DAB=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle EAD=\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{r}$　とおく。$0<a<1$, $0<b<1$ とする。辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X、辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH の交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面をαとする。



◆　問題の概略は次の通りである

(1)　内積　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}$ を求めさせる問題。

(2)　直線ECと平面αが直交するとき、a, b の関係式を求めさせ、$b=\dfrac{1}{2}$ のとき、点 E と平面の距離を求めさせる問題。

解答

A を原点にとり8個の点の座標を示す。

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$

$E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $G\left(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $H\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

更に、X, Y, Z の座標は

$X(a,0,0)$, $Y\left(1,\dfrac{b}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$, $Z\left(a,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

これで準備完了。あとは何でもござれ。

(1)　$\overrightarrow{EC}=\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{XZ}=\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より、$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=0+\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}=0$ 答

(2)　更に$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=0$ であればよい。$\overrightarrow{XY}=\left(1-a,\dfrac{b}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ より

$1-a+\dfrac{b}{4}-\dfrac{3}{4}b=0$　これより $2a+b=2$　答

$b=\dfrac{1}{2}$ のとき、$a=\dfrac{3}{4}$　このとき$X\left(\dfrac{3}{4},0,0\right)$, $Y\left(1,\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $Z\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ここで平面 XYZ の方程式を考える。

平面上の点 $P(x,y,z)$ に対して、平面XYZ の法線ベクトルを $\vec{n}=(p,q,r)$ とすれば、

$\overrightarrow{XP}\cdot\vec{n}=0$ から、平面の方程式は　$p\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+qy+rz=0$ ……※

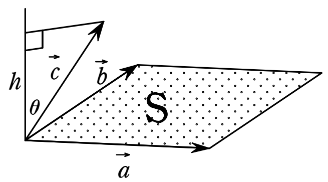
これが、Y, Z を通る条件から、$\begin{cases}\dfrac{p}{4}+\dfrac{q}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}r=0\\ \dfrac{3}{2}q+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=0\end{cases}$　これより$\begin{cases}p=2q\\ r=-\sqrt{3}\,q\end{cases}$

※に入れてqを消去して整理すると平面の方程式は　$4x+2y-2\sqrt{3}\,z-3=0$ となる。

よって、この平面と点 E の距離を d とすると、

$d=\dfrac{|0+1-3-3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-2\sqrt{3})^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{32}}=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$ 答

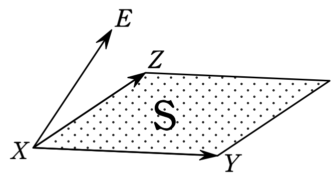
蛇足だが、紙面が余ったので、超難関大志望者のための話題を述べておこう。



２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積は外積$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさに対応する。ちなみに$\vec{a}\times\vec{b}$ は平面に垂直で$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$ となるベクトルのことである。また、３つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積は、$V=S\cdot h$　であるが、$h=|\vec{c}|\cos\theta$ なので、

$V=S|\vec{c}|\cos\theta=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$　となり、これは3次の行列式に対応する。

では、この観点から点と平面の距離を求めてみよう



図において$\overrightarrow{XY}=\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　$\overrightarrow{XZ}=\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より

$\overrightarrow{XY}\times\overrightarrow{XZ}=\left(\dfrac{3}{8},-\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$

よって、$S=\dfrac{1}{8}\sqrt{9+12+3}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

また、$\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{XZ}$, $\overrightarrow{XE}$ で張られる平行六面体の体積は

$$V=|\overrightarrow{XE},\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}|=\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1}{4}&\dfrac{1}{4}&\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ 0&\dfrac{3}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{3\sqrt{3}}{32}-\left(-\dfrac{7\sqrt{3}}{32}\right)=\dfrac{5}{16}\sqrt{3}$$

よって、E と平面XYZの距離を d とすると　$d=\dfrac{V}{S}=\dfrac{\dfrac{5}{16}\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$　答

2010年センター試験を振り返って③

～誘導がやたら多いがテーマは単純な数ⅡB三角関数の考察～

八戸西高校　下町壽男

数学の良さの一つとして、「自由な発想」があげられる。自由に考えることから、数学への興味関心も生まれるし新たな発見も得られるだろう。そういう意味では、あまり誘導の多い問題は自由が束縛される思いがしてあまり気持ちがいいものではない。

【数学ⅡB　1［2］（三角関数）】

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で　$\sin 4\theta=\cos\theta$ ……①　を満たすθと$\sin\theta$の値を求めよう。

一般に、すべてのxについて　$\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$　である。$\boxed{\text{シ}}$　に当てはまるものを次の(0)～(2)のうちから一つ選べ。　(0)　π　(1)　$\frac{\pi}{2}$　(2)　$-\frac{\pi}{2}$

したがって、①が成り立つとき、$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となり、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}}-\theta$ の取りうる値を考えれば、$4\theta=\boxed{\text{シ}}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となる。

よって、①を満たすθは、$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$　または $\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$　である。

まず、前段を見てみよう。ここでのテーマは、$\sin x=\sin y$ の解き方である。

私は次のように指導している（直前の講習でもやった！）。

①$\sin x=\sin y$ 型　$\begin{cases} x=y & \text{(動径一致)} \\ x=\pi-y & \text{(動径逆サイド)} \end{cases}$　とやりたいところだが、何回転かして動径が一致する場合もあるので、次のように書き換える。$\begin{cases} x=y+2n\pi & \text{(動径一致)} \\ x=\pi-y+2n\pi & \text{(動径逆サイド)} \end{cases}$

②$\cos x=\cos y$ 型　$\begin{cases} x=y & \text{(動径一致)} \\ x=-y & \text{(動径逆サイド)} \end{cases}$　これも何回転か分を考慮してまとめると $x=\pm y+2n\pi$ となる。

③$\sin x=\cos y$ 型　この場合は、余角の三角比　$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ を用いて、①②のタイプに持っていく。

これはきわめて自然な考えなので、上の問題文の傍線部分の誘導は必要ないのではと思うが。

解答　$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$　より

（ｉ）　動径一致のとき

$4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi$ より　$5\theta=\frac{1+4n}{2}\pi$　$\therefore\theta=\frac{4n+1}{10}\pi=\frac{\pi}{10},\frac{5}{10}\pi,\cdots\cdots$

条件にあうのは、$\theta=\frac{\pi}{10}$　答

（ii）　動径逆サイドのとき

$4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2n\pi$ より　$\theta=\frac{4n+1}{6}\pi=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\cdots\cdots$ 条件にあうのは、$\theta=\frac{\pi}{6}$　答

（『すべてのxについて　$\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$ である』　→　$x=0$ として$\sin\boxed{\text{シ}}=1$ から$\boxed{\text{シ}}=\frac{\pi}{2}$　もある）

【問題の後半】

$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{タ}}}$　である。$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$の値を求めよう。①より　$\boxed{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

となり、この式の左辺を2倍角の公式を用いて変形すれば

$\left(\boxed{\text{テ}}\sin\theta-\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta$　となる。ここで、$\cos\theta>0$ であるから

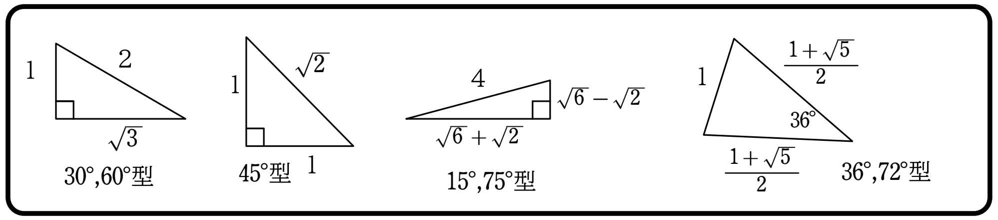
$\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta-\boxed{\text{テ}}\sin\theta+1=0$　……②　が成り立つ。　$\sin\theta=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ は②を満たしている。

$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ とすると、$\sin\theta\neq\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから　$\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{ニ}}\sin\theta-1=0$　となる。

ここで、$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}>0$ より、$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}=\frac{\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$　である。

傍線部分が全部誘導や説明で、問題を解くよりも解答のシナリオを追いかけていく方がシンドイ気がする。ここでのテーマはただ一つ、$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を求めるということ。

$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$　(30°,45°,60°) などが由緒正しい角ならば、$\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$　(15°,75°) は準由緒正しい角である。更にいえば、$\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5}$　(18°,36°) なども準由緒正しい角度として、それらの角がからんだ三角形の辺の比を覚えてセンター試験に臨むのが「センター慣れした」受験生の常識だ(笑)。



図より　$\sin 18^\circ=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 答　（ヌネノハ）これを踏まえて、逆から解いてみよう。

つまり、$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を解とする整数係数の最小多項式を求めればいいのである。更に、$\frac{1}{2}$ も解であることから次数を拡大すればよい。

$\sin 18^\circ=t$　とおくと、$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$　より、$4t+1=\sqrt{5}$

両辺を2乗して整理すると、$4t^2+2t-1=0$ 答（ナニ）

更に$t=\frac{1}{2}$ も解になるために、$(2t-1)(4t^2+2t-1)=0$ として左辺を展開すると

$8t^3-4t+1=0$　1を右辺に残す形にして　$4t-8t^3=1$ 答　（テト）