意地でも一般項を導く話

～母関数と3次方程式の解～

2007の岩手県の高校入試に出題された問題が面白かったので、採点日の後、校内の数学科の教員向けに以下のプリントを配った（§１～§３部分）。

その後、私たちが月に1度行っている数学サークル（杜陵サークル）でこの話をしたところ、是非一般項を求めてみよということになった。意地で一般項を求めたのが§４と§５の部分である。

§１　2007年度高校入試問題より

11　バスケットボールには、フリースローのほかに、2点シュートと3点シュートがあります。フリースローによる得点はないものとして、合計得点ごとに得点の経過が何通りあるかを調べてみました。

次の例は、合計得点が4点、5点、7点となる得点の経過について調べたものです。

(例1)　合計得点が4点となる得点の経過は、０→２→４（2点、2点の順に得点した場合）の1通りです。

(例2) 合計得点が5点となる得点の経過は、０→２→５（2点、3点の順に得点した場合）　０→３→５（3点、2点の順に得点した場合）の2通りです。

(例3) 合計得点が7点となる得点の経過は、０→２→４→７（2点、2点、3点）
０→２→５→７（2点、3点、2点）、０→３→５→７（3点、2点、2点）
の3通りです。

このようにして、合計得点が2点から9点までの場合について、得点の経過が何通りあるかをまとめたものが次の表です。

合計	2	3	4	5	6	7	8	9
経過	1	1	1	2	2	3	4	5

このとき次の(1)(2)の問いに答えなさい。

(1)　合計得点が10点となる得点の経過は何通りあるか。

(2)　合計得点が20点となる得点の経過は何通りあるか。

この問題は自然数の分割に関する問題です。(2)は難解で、中学生にはきついと思います。自然数の分割問題は、現代数学の一つのトレンドである「組合せ論」の分野になります。組合せ論では母関数（生成関数ともいう）を利用するのが常套手段となっているので、ここでは、この問題を解説しながら母関数について説明したいと思います。

§２　母関数

例えば、$1\div(1-2x)$ を行うとどのようになるでしょう。殆どの生徒は、商が０で余りが１と答えると思います。これは、整式において、定数項より x の項が次数が高いので、

$$\begin{array}{rl} & 0 \\ -2x+1\,\big) & \overline{\;1\;\;\;\;\;} \\ & \underline{\;0\;\;\;\;\;} \\ & 1 \end{array}$$

という割り算を行っているからです。

ところが、x のところが、もし$\dfrac{1}{10}$だったらどうでしょう。そうなると、次のような割り算になると思います。

$$\begin{array}{rl} & 1+\frac{2}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\cdots\cdots\cdots \\ 1-2\cdot\frac{1}{10}\,\big) & \overline{1\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \underline{1-\frac{2}{10}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \quad\frac{2}{10} \\ & \quad\underline{\frac{2}{10}-\frac{4}{10^2}\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \qquad\quad\frac{4}{10^2} \\ & \qquad\quad\underline{\frac{4}{10^2}-\frac{8}{10^3}\qquad\qquad} \\ & \qquad\qquad\quad\frac{8}{10^3} \end{array}$$

つまり、$\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{10}}=1+\dfrac{2}{10}+\dfrac{4}{10^2}+\dfrac{8}{10^3}+\cdots\cdots$　ということです。

このような割り算を、x についての整式にも当てはめてみると、先ほどの割り算は

$\dfrac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\cdots\cdots$　となります。

右辺の多項式は無限和になってますが、各項の係数を取り出して数列を作ると、

$1,2,4,8,16,\cdots\cdots\cdots$

と、初項１公比２の等比数列になっています。

一般項は、$a_n=2^{n-1}$　ですが、この数列を生成する式として、$\dfrac{1}{1-2x}$ を与えることもあります。この式を、$a_n=2^{n-1}$を生成する母関数（生成関数）といいます。

では、母関数の例を示しましょう。実際に割り算を行って確認してみてください。

例１　等比数列　$\dfrac{1}{1-rx}=1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\cdots$

例２　パスカルの三角形の斜め

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$（一般項　${}_nC_0$）　$\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$（一般項　${}_nC_1$）

$\dfrac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$　（一般項　${}_nC_2$）

例３　フィボナッチ数列　$\dfrac{1}{1-x-x^2}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots$

一般の数列の母関数はどのように求め方について、フィボナッチ数列を例に説明したいと思います。フィボナッチ数列の母関数を、

$F=1+x+2x^2+3x^3+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots$　①　とします。

フィボナッチ数列とは、漸化式　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$を満たす数列であることに注意して、

①の両辺に x をかけると、

$xF=x+x^2+2x^3+3x^4+\cdots+a_nx^{n+1}+a_{n+1}x^{n+2}+a_{n+2}x^{n+3}+\cdots$②

更に両辺に x をかけると

$x^2F=x^2+x^3+2x^4+3x^5+\cdots+a_nx^{n+2}+a_{n+1}x^{n+3}+a_{n+2}x^{n+4}+\cdots$　③

ここで、②+③を行うと、

$(x+x^2)F=x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots+(a_n+a_{n+1})x^{n+2}+\cdots$

この式の両辺に１を足すと、

$1+(x+x^2)F=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots+(a_n+a_{n+1})x^{n+2}+\cdots=F$

つまり、$(1-x-x^2)F=1$　$\therefore F=\dfrac{1}{1-x-x^2}$　フィボナッチ数列の母関数が得られました。

母関数が得られたとき、それを部分分数分解することで、一般項を得ることができます。

今、$1-x-x^2=0$ の２つの解を、$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$F=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{\beta-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}x}-\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}x}\right)$$

ここで、$\dfrac{1}{1-\frac{1}{\alpha}x}$ は、初項１、公比 $\dfrac{1}{\alpha}$ の等比数列を表すので、Fで生成される数列の一般項を a_n とすると　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n-\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n\right\}$

$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{-1-\sqrt{5}}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　より、$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

このように、母関数を用いると、部分分数分解を行うことで一般項を簡単に求めることができます。

§３　2007年度入試問題の母関数

とても長い前置きになりましたが、2007の問題を解いてみましょう。
自然数 n を２と３の和に（順序も含めて）分割する方法の数を a_n とすると、
$a_{n-2}+a_{n-3}=a_n$　$(a_1=0, a_2=1, a_3=1)$ という漸化式が成り立ちます。このことから項を次々求めていくと、

0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 , 12 , 16 , 21 , 28 , 37 , 49 , 65 , 86 , 114

となるので、得点が10点になる場合の数は７通り、20点になるのは114通りであることがわかります。

さて、ではこの数列の一般項はどうなるのでしょうか。漸化式　$a_{n-2}+a_{n-3}=a_n$ から一般項を求めていくのはとても無理です。

そこで、一般項のかわりに母関数を求めてみましょう。

$F=x+x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+9x^{10}+\cdots$　とおきます。

x をかけて、　$xF=x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+4x^8+5x^9+7x^{10}+9x^{11}+\cdots$

両者を加えて、

$(1+x)F=x+2x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+7x^7+9x^8+12x^9+16x^{10}+\cdots$

この両辺に x^2 をかけて、$x+x^2$ を加えると、右辺は F に戻ります。

$$x+x^2+x^2(1+x)F=x+x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+\cdots=F$$

よって、$(1-x^2-x^3)F=x+x^2$　$\therefore F=\dfrac{x+x^2}{1-x^2-x^3}$　母関数が得られました。

実際に割り算して、数列が得られていくことを確かめてみてください。

この母関数から部分分数分解で一般項を求めることができますが、そのためには
$x^3+x^2-1=0$ を解く必要がでてくるので、非常に難しくなり、求めても非常に複雑な形になるので、一般項を求めることはあまり意味のないことになります。

しかし、このように、母関数から部分分数分解を経て一般項を求める手法は、隣接多項間漸化式を解く場合に非常に強力な方法になるので、マスターしておくととても便利だと思います。

（2007年3月15日　花巻北高校　下町壽男）

§４　母関数から一般項を求める

§３で求めた母関数 $F=\dfrac{x+x^2}{1-x^2-x^3}$ から一般項を求めてみましょう。ポイントは、部分分数分解ですが、残念なことに、$1-x^2-x^3$ は有理数の範囲で因数分解ができません。とりあえず、$x^3+x^2-1=0$ の３つの解を α, β, γ として進めてみます。

解と係数の関係より、$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\gamma=1 \end{cases}$

まず、とりあえず　$F_1=\dfrac{1}{\alpha-x}+\dfrac{1}{\beta-x}+\dfrac{1}{\gamma-x}$ として、これを計算してみると、

$$F_1=\frac{(\beta-x)(\gamma-x)+(\alpha-x)(\gamma-x)+(\alpha-x)(\beta-x)}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}=\frac{3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

$$=\frac{3x^2+2x}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

残念ながら、係数が付いてしまい F にはなりません。そこで今度は、

$F_2=\dfrac{\alpha}{\alpha-x}+\dfrac{\beta}{\beta-x}+\dfrac{\gamma}{\gamma-x}$ としてみます。

$$F_2=\frac{\alpha(\beta-x)(\gamma-x)+\beta(\alpha-x)(\gamma-x)+\gamma(\alpha-x)(\beta-x)}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+3\alpha\beta\gamma}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

$$=\frac{-x^2+3}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

F_1, F_2 の1次結合で F が表せれば理想的ですが、分子は2次式なので、式がもう一つなければなりません。

そこで、$F_3=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-x}+\dfrac{\beta^2}{\beta-x}+\dfrac{\gamma^2}{\gamma-x}$ としてみます。

$$F_3=\frac{\alpha^2(\beta-x)(\gamma-x)+\beta^2(\alpha-x)(\gamma-x)+\gamma^2(\alpha-x)(\beta-x)}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2-\{\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)\}x+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$$

ここで、$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1$

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

$=\alpha\beta(-1-\gamma)+\beta\gamma(-1-\alpha)+\gamma\alpha(-1-\beta)=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma=-3$

よって、$F_3=\dfrac{x^2+3x-1}{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}$

F_1, F_2, F_3 は1次独立なので、これらの結合で F を表すことができます。

$F=kF_1+lF_2+mF_3$ とおくと

$x^2+x=(3k-l+m)x^2+(2k+3m)x+(3l-m)=0$　となるので、各項の係数を比較して k, l, m を求めると、

$$k=\frac{7}{23}, l=\frac{1}{23}, m=\frac{3}{23}$$

つまり

$F=\frac{7}{23}F_1+\frac{1}{23}F_2+\frac{3}{23}F_3$　なんとか部分分数分解ができました。

ここで、$\frac{1}{\alpha-x}=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}x}$ なので、この母関数が表す数列の一般項は、$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$

$\frac{\alpha}{\alpha-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}x}$ なので、この母関数が表す数列の一般項は、$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$

$\frac{\alpha^2}{\alpha-x}=\frac{\alpha}{1-\frac{1}{\alpha}x}$ なので、この母関数が表す数列の一般項は、$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2}$

よって、求める数列の一般項を a_n とすると、

$$a_n=\frac{7}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\left(\frac{1}{\beta}\right)^n+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n\right\}+\frac{1}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}\right\}+\frac{3}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}\right\}$$

§ 5　α,β,γ を決定する

一応一般項の形にはなりましたが、α,β,γが未知なので、これを求めないことには一般項を求めたことにはなりません。歯を食いしばってα,β,γを求めてみましょう。

3次方程式の解法（カルダノの方法）は、

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

という有名な因数分解を利用するのがわかりやすいので、これで少し準備しましょう。

上式で、a を x とおくと、

$$x^3-3bcx+(b^3+c^3)=(x+b+c)\{x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc\}$$

なので、$x^3-3bcx+(b^3+c^3)=0$ を解くと、$x=-b-c$ がまず１つの解です。

残りの解は、$x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc=0$ を解いて

$x=\frac{b+c\pm\sqrt{-3(b-c)^2}}{2}=\frac{(b+c)\pm(b-c)\sqrt{3}\,i}{2}$　これを整理すると

$x=\frac{b}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i)+\frac{c}{2}(1\mp\sqrt{3}\,i)$ となるので、１の3乗根　$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を用いると、２つの解は、$-b\omega^2-c\omega,\ -b\omega-c\omega^2$ となります。

では、これを利用して、$x^3+x^2-1=0$ の解 $\alpha.\beta,\gamma$ を求めてみましょう。

まず、2次の項を落として、$X^3+pX+q=0$ という形にしなければなりませんので、

$X=x+\dfrac{1}{3}$ と変数変換します。

$$\left(X-\frac{1}{3}\right)^3+\left(X-\frac{1}{3}\right)^2-1=0$$

$$X^3-X^2+\frac{1}{3}X-\frac{1}{27}+X^2-\frac{2}{3}X+\frac{1}{9}-1=0$$

$$X^3-\frac{1}{3}X-\frac{25}{27}=0$$

ここで、$x^3-3bcx+b^3+c^3=0$ と比べて、

$\begin{cases} -3bc=-\dfrac{1}{3} \\ b^3+c^3=-\dfrac{25}{27} \end{cases}$　となる b , c を求めればよい。

$b^3c^3=\dfrac{1}{729}$ なので、b^3 , c^3 は2次方程式　$t^2+\dfrac{25}{27}t+\dfrac{1}{729}=0$　の解である。

$$t=\frac{-\dfrac{25}{27}\pm\sqrt{\dfrac{625}{729}-\dfrac{4}{729}}}{2}=\frac{-\dfrac{25}{27}\pm\sqrt{\dfrac{23}{27}}}{2}=\frac{-25\pm3\sqrt{69}}{54}$$

よって、$b=\sqrt[3]{\dfrac{-25+3\sqrt{69}}{54}}$, $c=\sqrt[3]{\dfrac{-25-3\sqrt{69}}{54}}$

以上より、方程式 $x^3+x^2-1=0$ の解は

$$\alpha=-\sqrt[3]{\frac{-25+3\sqrt{69}}{54}}-\sqrt[3]{\frac{-25-3\sqrt{69}}{54}}-\frac{1}{3}$$

$$\beta=-\sqrt[3]{\frac{-25+3\sqrt{69}}{54}}\,\omega^2-\sqrt[3]{\frac{-25-\sqrt{69}}{54}}\,\omega-\frac{1}{3}$$

$$\gamma=-\sqrt[3]{\frac{-25+3\sqrt{69}}{54}}\,\omega-\sqrt[3]{\frac{-25-\sqrt{69}}{54}}\,\omega^2-\frac{1}{3}$$

つまり、求めたかった数列の一般項は

$$a_n=\frac{7}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\left(\frac{1}{\beta}\right)^n+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n\right\}+\frac{1}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}\right\}+\frac{3}{23}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}\right\}$$

$(\alpha=-\sqrt[3]{\dfrac{-25+3\sqrt{69}}{54}}-\sqrt[3]{\dfrac{-25-3\sqrt{69}}{54}}-\dfrac{1}{3}$　$\beta=-\sqrt[3]{\dfrac{-25+3\sqrt{69}}{54}}\,\omega^2-\sqrt[3]{\dfrac{-25-\sqrt{69}}{54}}\,\omega-\dfrac{1}{3}$

$\gamma=-\sqrt[3]{\dfrac{-25+3\sqrt{69}}{54}}\,\omega-\sqrt[3]{\dfrac{-25-\sqrt{69}}{54}}\,\omega^2-\dfrac{1}{3})$

「だからなんなんだ」とか「それがどうした」といわれそうである。