「縦糸･横糸･うちわ型」の話①

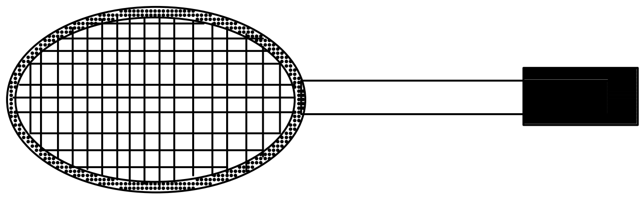
～盛岡三高2002年朝課外より～

【本日の例題】

> 媒介変数表示された曲線
>
> C: $x=e^{-t}\cos t$ ，$y=e^{-t}\sin t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を考える。
>
> C と x 軸、y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めよ。　　（京大）

1　テニスのラケットと団扇からみえること

T：今日はちょっと変わったものを持ってきました。１つはテニスのラケットです。



　このラケットにはガットが張ってありますよね。このガットの縦糸の長さの総和と、横糸の長さの総和ではどちらが長いと思いますか。テニス部のまりさんどう思いますか。

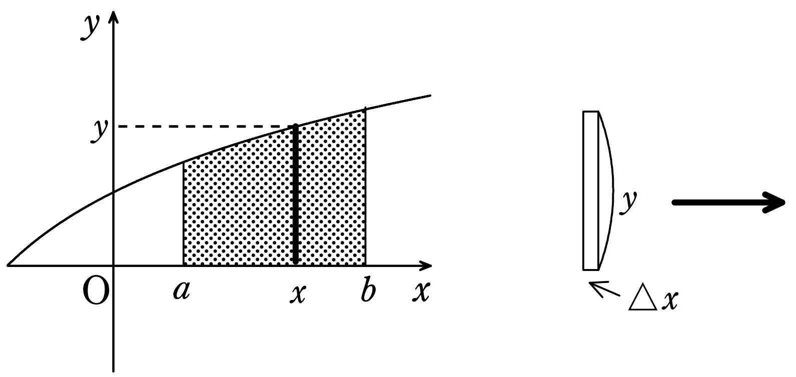
まり：ええと…。どうでしょう。同じくらいじゃないかと思いますが。

T：うん。私はよくわからないので、テニス部の顧問のM先生に聞いてみたんですが、やはり同じくらいだといっていました。

　で、私は、実際にどっちが長いかわかりません。しかし、**１つだけわかることがあります。それは、このガットの間隔を限りなく小さくして、何本ものガットをはっていったとすると、縦糸の長さの総和も、横糸の長さの総和も等しくなる、ということです。**

けい：そうか。どちらも面積になるんですね。

T：そう。私たちが一般に用いている面積を求める式はいわば「縦糸型」といえますね。

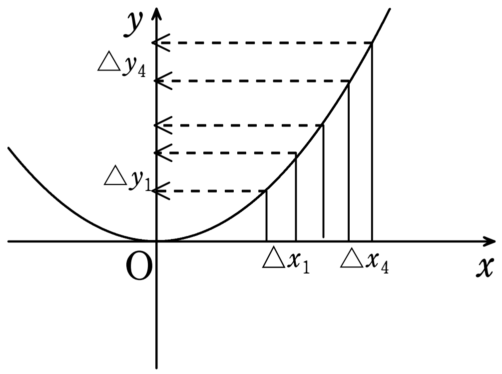


$$S=\int_a^b y\,dx$$

つまり、分割を縦側にとっても、横側にとってもその分割を限りなく0に近づければどちらも同じ値に収束するということがいえるのです。この収束する値を面積と定義してもいいわけです。

えり：分割というのは $\triangle x$ なんですか、それとも dx なんですか。そもそも $\triangle x$ と dx は同じものなんですか。

T：$\triangle x$ は x の微小増分で、dx はその増分の規則のようなものと考えればいいと思います。例えば、上の図の面積を求めるときの x の分割は「等分割」ですが、面積を考えるときは必ずしも分割は等分割でなくてもいいんです。



例えば上図で、$\triangle x_k$ は等分割だったとします。ところが、それに対応する y の増分は等分割にはなりません。もし、この関数が、 $y=x^2$ だとすると、 y の増分は、x の増分の $2x$ 倍になります。

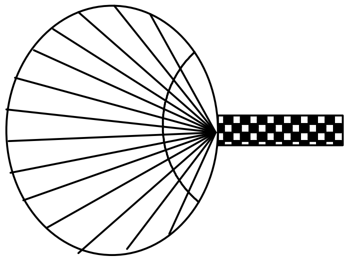
これを、分割の規則で表現すると、$dy=2x\,dx$　となります。

ひろ：置換積分で、$dy=2x\,dx$ なんてやるのは、いわば分割をバトンタッチするということなんですね。

T：そうです。面積を求めるには、「分割をどう決めるか」そして、分割で定まる面積の増分を求めてそれを全部加えあわせるということをするわけですね。

さて、ではここで、今日持ってきたもうひとつのものを皆さんに見せましょう。

これはなんでしょう。

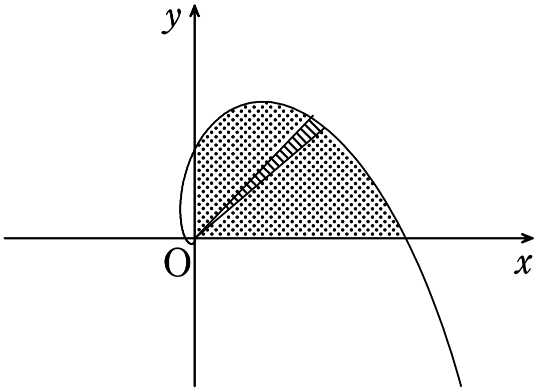


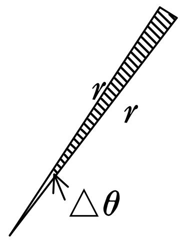
実はこれは、うちわを水につけておいて、紙をはがしたものです。骨だけになってしまいました。これ、何がいいたいかわかりますか。

きけ：つまり、分割を放射状にしたんですね。このような分割に対しても面積の微小増分を表すことができるわけですね。

たつ：「縦糸」「横糸」の他に、このうちわの骨も、限りなくいっぱいにすると面積になるってわけですか。

Ｔ：そうです。この放射状分割は、x 軸方向でも、 y 軸方向でもないので、図形の方程式が、 x 軸正の向きとのなす角 θ と、原点からの距離 r で表されていなければなりません。つまり、極方程式ですね。今回の問題は、縦糸型でやることもできるのですが、極方程式で表すことができるので、うちわ型、つまり放射状積分ができるのです。





上図のように極方程式、$r=f(\theta)$ で表された図形の方程式があったとします。このとき、図の斜線部分の面積は、微小面積が、$dS=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$ となることから、

$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$　と表すことができますね。

２　放射状積分

ひか：微小面積は、扇形と考えるんですか。三角形のような気がしますが。

Ｔ：三角形でもいいです。すると、$dS=\dfrac{1}{2}r^2sin\,d\theta$ となりますが、$sin\,d\theta=d\theta$ と見ていいのです。

ひか：ああ。$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{sin\theta}{\theta}$ ですね。

Ｔ：そうです。それでは本日の問題をやってみましょう。

$C\colon x=e^{-t}cos\,t$　，　$y=e^{-t}sin\,t$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

ですから、$x=☆cost$　，$y=☆sint$ となっていますから、これは極方程式にできます。

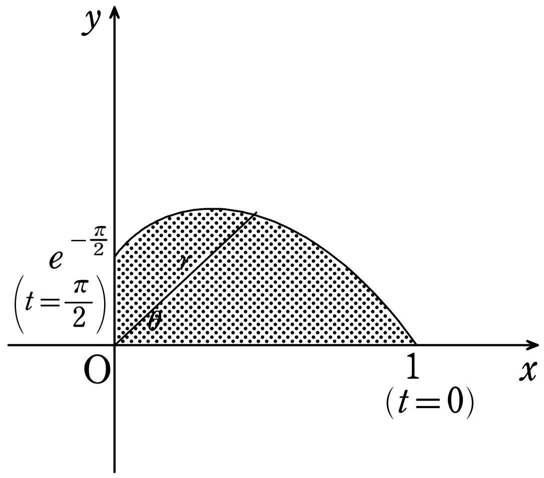
つまり、$r=e^{-t}$ が求める図形の方程式です。

くま：これはどのようにしてグラフを描けばいいのですか。

T：グラフは概形でいいでしょう。きちんと描くのであれば

C: $x=e^{-t}\cos t$ ， $y=e^{-t}\sin t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ から、$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ の符号の変化を調べるわけですが、ここでは、$r=e^{-t}$ からざっとグラフを考えることにしましょう。

つまり、$t=0$ のとき半径 $r=1$ 、そして、$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$r=e^{-\frac{\pi}{2}}$ 、半径は、 t の増加にともなって単調に減少していますから、グラフは以下のような感じになります。



この図形の方程式を「対数螺旋」といいます。t をどんどん増やしていけば、原点にむかってどんどん渦をまいていくことがわかります。$r=e^{-t}$ という極方程式から、 r は回転するたびに等比数列的に小さくなっていくことがわかると思います。

では、放射状積分で面積を求めましょう。

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{-2t}dt=\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}(1-e^{-\pi})\cdots\boxed{答}$$

まともに（縦糸型）でやってみるとどうなるでしょう。

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}\sin t\,(-e^t\cos t-e^{-t}\sin t)dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}(\sin t\cos t+\sin^2 t)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin 2t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\cos 2t\,dt \quad\cdots※$$

ここで、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos 2t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\cos 2t\,dt$$

つまり、※式の後ろの２項が消えて、$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}dt=\dfrac{1}{4}(1-e^{-\pi})$ と求まります。

この計算を行ってみると、放射状積分の威力を感じますね。

＜ちょっと余談を＞

$x=e^{-t}cost$，$y=e^{-t}sint$ について補足します。

今、$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)$ とします。前者は位置を表すベクトル。

後者は P における速度ベクトルです。$\vec{v}$ の向きは、図形の接線方向であることに注意してください。

さて、すると、$\left|\overrightarrow{OP}\right|=e^{-t}$

$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(sin\,t+cos\,t)$，$\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(-sin\,t+cost)$ より、

$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{e^{-2t}(1+2sintcost+1-2sintcost)}=\sqrt{2}\,e^{-t}$ となります。これは、速さですね。また、$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}=-e^{-2t}(sintcost+cos^2t)+e^{-2t}(-sin^2t+sintcost)$

$=-e^{-2t}$

よって、$\overrightarrow{OP}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ とすると、

$cos\,\theta=\dfrac{-e^{-2t}}{e^{-t}\sqrt{2}\,e^{-t}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって、$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

つまり、この図形は、原点と結んだ線分と接線とのなす角がつねに $\dfrac{3}{4}\pi$（一定）の図形であることがわかります。このことから、対数螺旋を「等角螺旋」と呼ぶこともあります。

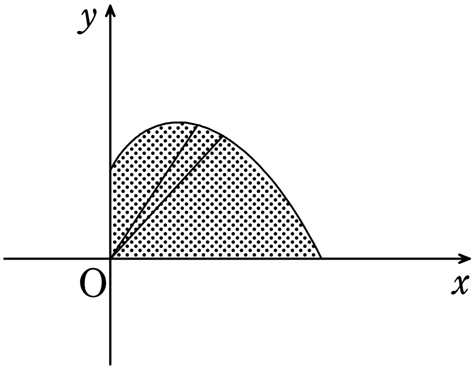
3　放射状積分後日談　～曲線の長さを求める～

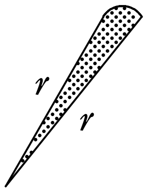
Ｓ：先生質問があります。あの、例の「うちわ型積分」なんですが。

Ｔ：ああ、極方程式から面積を簡単に求める方法ですね。

Ｓ：ええ。あの求め方は、例えば図の斜線部分の面積を求めるとき、面積の増分を

$dS=\frac{1}{2}r^2d\theta$ として、それを積分して、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2d\theta$ としましたよね。





$dS=\frac{1}{2}r^2d\theta$

Ｔ：そうですね。それがどうかしましたか。

Ｓ：で、私は、曲線の長さを出すときもこの考え方を使ってみたんです。

つまり、上の図において、$\theta=0$ から $\theta=\frac{\pi}{2}$ における曲線の長さはを l とすると、

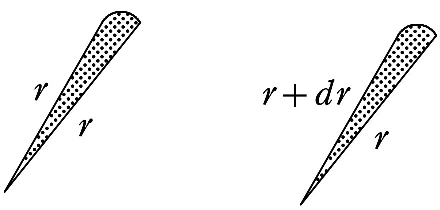
$dl=rd\theta$ ですよね。それで、それを積分して、$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}rd\theta$　とやってみたらうまくいかないんです。どうしてでしょうか。

Ｔ：ああそうか。うん。これはうまくいかないだろうね。

Ｓ：どうしてですか。

扇形の面積…$\frac{1}{2}r^2\theta$　円弧の長さ…$r\theta$　でいいですよね。

Ｔ：それはいいですが、問題は、図形の方程式は、θ の変化に伴って、r も変化するということです。つまり、$\theta\to\theta+d\theta$ となるとき、$r\to r+dr$ となる。２つの変化を見逃してはいけないのです。つまり、先ほどの図は、左のようにどちらも r ではなく、一方を$r+dr$ として考えなければならないんですね。



Ｓ：えっ。でも面積の時はそんなことをしなくてもよかったじゃないですか。

T：うん。面積は r^2 のオーダーだから、$(dr)^2$ がでてきて、結局そこは無視しても良い。
だが、曲線の長さという場合にはこの dr は無視できないのです。

S：ちょっとよくわかりませんが。

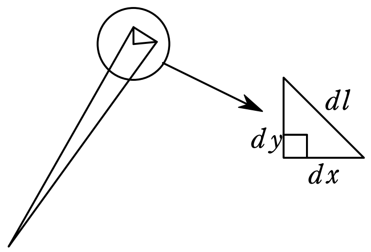
T：じゃあ、普通曲線の長さを求めるとき、どう考える？

S：ええと、２通りのやりかたがあって、

$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ から、$l=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ とするか、

$l=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ とするかどちらかです。

T：そうですね。つまり、ポイントはピタゴラスの定理です。dx の具合と、dy の具合を考えて、 dl が決まるのです。だから、先ほどのように、両方とも r とおいてしまうと、dx と dy がいつでも同じものになっていて意味が無くなるんです。



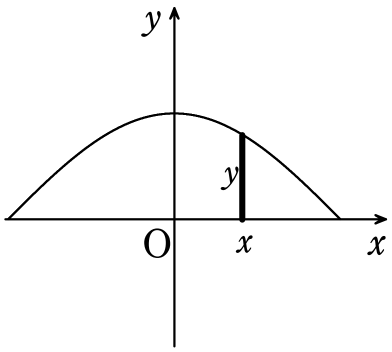
S：なぜ、長さの時はだめで、面積の時はいいのかがまだよくわかりません。

T：では、ちょっと具体的な話をしましょう。
そうですね。ちょっと話は変わりますが、バームクーヘン積分の話は覚えていますか。

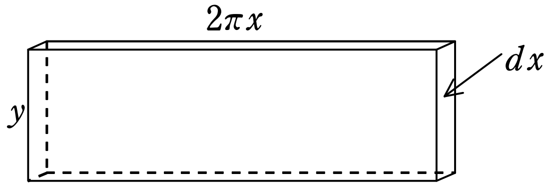
S：はい。y 軸まわりの回転体で、体積は $V=\int_a^b 2\pi xy\,dx$ となるやつですよね。

T：そうです。そのときの V の出し方は覚えていますか。

S：ええと、確か次のように図で説明されました。



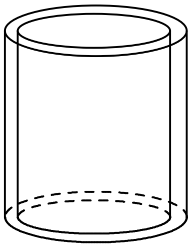
図のような、高さ y 厚さ dx の棒が y 軸のまわりを１回転するので、図から、$dV=2\pi xy\,dx$ がわかります。



T：そのとおり。確かに授業ではそうやりましたが、実はこれにはまやかしがあるんです。

S：えっ。まやかしですか。

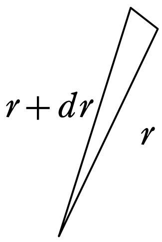
T：実際、 x 軸に垂直な細い棒をまわしたときに、できる立体は、図のような円柱から内側の円柱を取り除いたものになりますね。



すると、この体積は正確には、$dV=2\pi xy\,dx$ とはなりません。外側の円柱の半径は、$x+dx$ 、内側の円柱の半径は x なので、求める体積は、$dV=\pi(x+dx)^2y-\pi x^2y=2\pi xy\,dx+\pi y(dx)^2$ と、後ろに余分な項がつくのです。上の式を、$\dfrac{dV}{dx}=2\pi xy+\pi y\,dx$ としたときに、後ろの項は０と見てよいということです。この辺の話をもっときちんと理解するためにはいろいろな準備が必要ですので今は、$(dx)^2$ のレベルは無視して良いという感覚を持っていればいいと私は思います。後は大学でやることになるでしょう。

Ｓ：そうすると、さきほどの極方程式の面積とどうつながりますか。

Ｔ：つまり、図の面積の増分は、$dS=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$ という扇形の面積を求めるのではなくて、２辺が r , $r+dr$,なす角が $d\theta$ の三角形の面積を求めるという話になるのです。



すると、面積は、$dS=\dfrac{1}{2}r(r+dr)sin\,(d\theta)$ となります。

よって、$dS=\dfrac{1}{2}r^2sin\,(d\theta)+\dfrac{1}{2}r(dr)(d\theta)$ となりますね。

ここで、$sin\,(d\theta)=d\theta$ と見てよくて、後ろの項は、dr と $d\theta$ という無限小のものがかけられているので、無視してよいことになるのです。従って、結局　$dS=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$ が導かれます。

Ｓ：なるほど。では、曲線の長さも同様に考えるわけですか。

Ｔ：そうですね。余弦定理を使って、求めてみるとどうなりますか。

Ｓ：$(dl)^2=(r+dr)^2+r^2-2(r+dr)rcos\,(d\theta)$

$=2r^2+2r(dr)+(dr)^2-2r^2cos\,(d\theta)-2r(dr)cos\,(d\theta)$

$=2r^2(1-cos\,(d\theta))+2r(dr)(1-cos\,(d\theta))+(dr)^2$

ここで、$sin^2\theta=\dfrac{1-cos\,2\theta}{2}$ という式を思い出して、

$$(dl)^2=4r^2sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)+4r(dr)sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right)+(dr)^2$$

更に $sin^2\left(\dfrac{d\theta}{2}\right)=\left(\dfrac{d\theta}{2}\right)^2$ と見て、

$$(dl)^2=r^2(d\theta)^2+r(dr)(d\theta)^2+(dr)^2$$

よって、$dl=\sqrt{r^2(d\theta)^2+r(dr)(d\theta)^2+(dr)^2}$　となりました。

T：さて、ここで、右辺のルートの中の後ろ２つの項を０と見てよければ、

$dl = r\,d\theta$ となり、最初にあなたがやろうとした計算になりますね。

ところが、残念ながら、$(dr)^2$ などは2次の項だけれど、ルートの中に入っているから実質一次のオーダーです。ですから、この式は、

$dl = \sqrt{r^2 + r(dr) + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ と変形してみればわかりやすくなります。

S：なるほど。

ルートの中の、r^2 は当然無視できない。そして、$\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$は、分母も分子も０と見ていいけれど、その商なので０へは行かないんだ。つまり、先ほどの面積とは異なってここが残ってしまうのですね。

T：そうです。で、ルートの中の第２項は dr と r との積なので０と見てよいのです。

つまり、

$dl = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ となるわけです。

そうすると、怪我の功名です。極方程式から曲線の長さを導く公式を手に入れることができました。

以下に記しておきましょう。

【極方程式から面積･長さを求める方法】

①　面積　$S = \int_a^b \dfrac{1}{2} r^2 d\theta$

②　曲線の長さ　$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$

T：なかなかきれいな式ですね。では例題をやってみましょう。

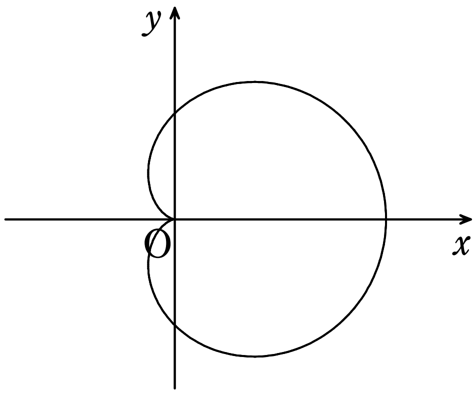
例　$x = e^{-t} cos\,t$ ，$y = e^{-t} sin\,t$ において、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線の長さを求めよ。

S：　　極方程式は $r = e^{-t}$

よって、$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2t} + (-e^{-t})^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,e^{-t} dt = \left[\sqrt{2}\,e^{-t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} - 1\right)$　答

なんとあっという間に求まりました。

T：では調子に乗ってもう一つ。カージオイドの長さを求めましょう。



極方程式は　$r=1+cos\,t$　でした。

S：０からπまで考えて、それを後で2倍すればいいですね。

$$\frac{l}{2}=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{1+2cos\,t+cos^2\,t+sin^2\,t}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+cos\,t)}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2\int_0^{\pi}cos\,\frac{t}{2}dt=2\left[2sin\,\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=4$$　よって $l=8$

うーん。恐ろしく早くて簡単ですね。