部分積分からテーラー展開を望む

～2002年の盛岡三高での生徒とのやり取りより～

1　素朴な疑問から始まって

S：先生。ちょっと質問があるんです。定積分のとき、$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$ とやりますよね。このとき、$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)+C\Big]_a^b$ としてもいいんですか。

T：どのみち、同じ値になるからね。$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)+C\Big]_a^b$ とやる必要はないですね。

S：じゃあ、ほんとは$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)+C\Big]_a^b$ なんだけれどどのみち同じになるから $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$ とかいてもいいんだということですか。

T：それはわからないけれど、多分そうかもね。

S：部分積分のときはどうなんですか。

$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$　というやつ。

このとき、$f'(x)\to f(x)$ でなく、$f(x)+C$ とおいてもいいんですか。

T：やってみてごらん。

$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\Big[\{f(x)+C\}g(x)\Big]_a^b-\int_a^b\{f(x)+C\}g'(x)dx$ とすると…

S：右辺$=\{f(b)+C\}g(b)-\{f(a)+C\}g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)dx-C\int_a^b g'(x)dx$

$$=f(b)g(b)+Cg(b)-f(a)g(a)-Cg(a)-\int_a^b f(x)g'(x)dx-C(g(b)-g(a))$$

$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$　一致しました。

T：つまり、部分積分でも $f(x)+C$ と積分定数をつけてもよいということがわかりましたね。じゃあ、せっかくだからこのことを利用して少し大学数学につながる話をしてみましょう。

2　部分積分の便利な求め方

T：簡単に部分積分をする工夫として、次のような図示をやりましたね。

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

積分する方　　　　微分する方

$$\begin{tikzcd}
f'(x) \arrow[d, dashed] & g(x) \arrow[d, dashed] \arrow[dl] & \\
f(x) \arrow[r] & g'(x) \arrow[r, dashed] & \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx
\end{tikzcd}$$

（**注意**　授業では「積分する方」と「微分する方を逆にかきました）

S：ななめの矢印が第１項を、横の矢印が第２項の積分を表すのでした。

T：そうです。横の矢印部分が、第２項の積分を表すので、更にその積分に部分積分を施すと、下図のように、もう一回対角線と横の矢印でつなげていけばよいことになりますね。

積分する方　　　微分する方

$$\begin{tikzcd}
f'(x) \arrow[d, dashed] & g(x) \arrow[d, dashed] \arrow[dl, "+"'] & \\
f(x) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & g'(x) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, "-"'] & \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx \arrow[d, "※"] \\
F(x) \arrow[r] & g''(x) \arrow[r, dashed] & \Big[g'(x)F(x)\Big]_a^b-\int_a^b F(x)g''(x)dx
\end{tikzcd}$$

S：これをまとめてかけば

$\Big[f(x)g(x)-g'(x)F(x)\Big]_a^b+\int_a^b F(x)g''(x)dx$　とできます。※の項の前にマイナスがあるので符号に注意する必要がありました。

T：そうですね。この方法は、何回か微分して０になる関数（整関数）と、三角関数や指数関数がかけられている形の部分積分を行うときに便利でした。

では、ひとつ例をやってみましょう。

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

S：便利図は下のようになります。

$$
\begin{tikzcd}
\text{積分} & \text{微分} & \\
\sin x \arrow[d, dashed] & x^2 \arrow[dl, "+"'] \arrow[d, dashed] & \\
\cos x \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 2x \arrow[dl, "-"'] \arrow[d, dashed] & \\
-\sin x \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 2 \arrow[dl, "+"'] \arrow[d, dashed] & \\
-\cos x & 0 & \text{ここが０になるのがポイント。} \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

よって求める積分は

$$\Big[x^2\cos x + 2x\sin x - 2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

このように一方が整関数だと、最後には積分がなくなってしまうのでうまくいくんですね。

例えば、$\displaystyle\int f(x)e^x dx$ で、$f(x)$ が n 次の多項式ならば、$f(x)$ を $n+1$ 回微分して０になるので、$\displaystyle\int f(x)e^x dx = (f - f' + f'' - \cdots + (-1)^n f^n)e^x + C \quad n = 0,1,2,\cdots$

とできますね。

T：なるほどね。では、微分する方の関数が整関数でないときはどうなるのでしょう。

S：いくらでも積分が続いてしまうのですか。

T：ではその話は次回にしましょう。

3　テーラー展開へ

T：では、今回は部分積分の便利図の応用についての話題です。

今、次の定積分を考えます。

$\displaystyle\int_a^b f'(x)dx$　ただし $f(x)$ は無限回微分できる関数です。

このとき、$\displaystyle\int_a^b 1\cdot f'(x)dx$ と考えて積分するのがポイントでした。

S：そうですね。例えば、$\displaystyle\int_a^b \log x\,dx = \int_a^b 1\cdot \log x dx$ なんかが有名です。

T：さあ。では $\displaystyle\int_a^b 1\cdot f'(x)dx$ を便利図で何回か書き出してみますが、ここでちょっと変わったことをします。1の不定積分はxですが、前回に述べたことから、これは $x+C$ としてもよかったですね。そこで、1の積分を今、$x-b$ とおくこおとにしたいと思います。

$$\boxed{\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed] & f'(x) \arrow[d, dashed] \arrow[dl] \\
(x-b) \arrow[d, dashed] & f''(x) \arrow[d, dashed] \arrow[dl] \\
\frac{1}{2}(x-b)^2 \arrow[d, dashed] & f'''(x) \arrow[d, dashed] \arrow[dl] \\
\frac{1}{6}(x-b)^3 & f''''(x)
\end{tikzcd}}$$

式になおすと、

$$\int_a^b f'(x)dx = \left[(x-b)f'(x) - \frac{1}{2}(x-b)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(x-b)^3 f'''(x)\right]_a^b$$
$$-\int_a^b \frac{1}{6}(x-b)^3 f''''(x)dx$$

ここで、左辺は $f(b)-f(a)$

右辺は

$$(b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \frac{1}{6}(b-a)^3 f'''(a) - \int_a^b \frac{1}{6}(x-b)^3 f''''(x)dx$$

と変形できることに注意してください。

このことから、

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \frac{1}{6}(b-a)^3 f'''(a) - \int_a^b \frac{1}{6}(x-b)^3 f^{(4)}(x)dx$$

と表されることがわかります。

Ｓ：この式に何か意味があるんですか。

Ｔ：はい。これはけっこう重要な式です。大学で「テーラー展開」というものを習うのですがその導入になる式です。

Ｓ：テーラー展開って一言でいうとどんなことですか。

Ｔ：一言でいえば「すべての関数を整関数で表しちゃおう」ということです。つまり、分数関数も三角関数も指数対数関数も、みんなxの整式で表現しようという考えですね。

このことによって、関数の値の近似値などがわかるようになります。

ではそのテーラー展開を作ってみましょう。

先ほどは、便利図を３段まで作ったのですが、もっと続けて積分していくことにすると、n 回部分積分を行った後の式はどうなるでしょう。

Ｓ：ええと。n 回微分を $f^{(n)}(x)$ と書くことにすると、

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2f''(a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)\pm\int_a^b\frac{1}{n!}(x-b)^{n-1}f^{(n)}(x)dx$$

というカンジですか。

Ｔ：そうです。これがいわゆる $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開といいます。

最後の定積分をテーラー展開の剰余項といいます。

Ｓ：n の偶奇によって＋ か− かわからないので ± にしました。

Ｔ：この式の中で、最後の項だけが他と違うのでいやな感じがしますが、例えば、

b が a に非常に近い数、つまり$b=a+h$ （h は非常に小さい）というとき、上の式はどうなりますか。

Ｓ：$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}h^{n-1}f^{(n-1)}(a)\pm\int_a^{a+h}\frac{1}{n!}(x-b)^{n-1}f^{(n)}(x)dx$

Ｔ：項が進むにつれ、どんどん項の値が小さくなっていくことがわかります。最後の剰余項は「無視していいほどに」小さくなると考えることができますね。

Ｓ：最初の２項　$f(a+h)=f(a)+hf'(a)$ は授業でもやった近似式ですね。

Ｔ：そうです。３項までとって　$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)$とすればもっと精度の高い近似になるわけです。

さて、今、先ほど得られたテーラー展開

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2f''(a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)\pm\int_a^b\frac{1}{n!}(x-b)^{n-1}f^{(n)}(x)dx$$

を、

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2f''(a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)\pm\int_a^b\frac{1}{n!}(t-b)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$

と書き直しておいて、$b=x\,,a=0$ とおいてみましょう。

S：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)x^{n-1}\pm\int_a^b\frac{1}{n\,!}(t-x)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$

T：この式を、$f(x)$ のマクローリン展開といいます。剰余項を無視した項は整式になっているので、この式は、$x=0$ の近くでの $f(x)$ の多項式による近似式ということができます。

ではこのマクローリン展開で、いくつか超越関数の近似式を作ってみましょう。

4　マクローリン展開と超越関数の近似式

T：では今回は、具体的にいくつかの関数のマクローリン展開を求めてみることにしましょう。まず、$f(x)=e^x$ をやってみましょう。

$\int_0^x e^t\,dt$ を、$\int_0^x 1\cdot e^t\,dt$ とみて、便利図で部分積分してみましょう。

ただし、１の不定積分を、$t-x$（x は積分定数）とおくことに注意してください。

S：ではやってみます。

$$\begin{array}{ll}
1 & e^t \\
\vdots & \vdots \\
t-x & e^t \\
\vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}(t-x)^2 & e^t \\
\vdots & \vdots \\
\frac{1}{6}(t-x)^3 & e^t \\
\vdots & \vdots \\
\frac{1}{24}(t-x)^4 & e^t
\end{array}$$

よって　$\int_0^x e^t\,dt=\left[e^x(t-x)-\frac{1}{2}e^t(t-x)^2+\frac{1}{6}e^t(t-x)^3-\frac{1}{24}e^t(t-x)^4+\cdots\right]_0^x$

$$e^x-1=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots$$

つまり、$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots$　となりました。

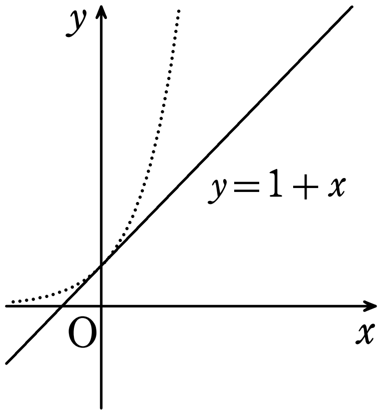
剰余項は無視しました。

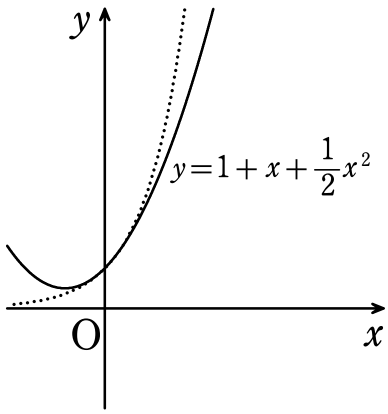
T：これをΣで無限級数の形にすると、$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}x^n$　というようになります。

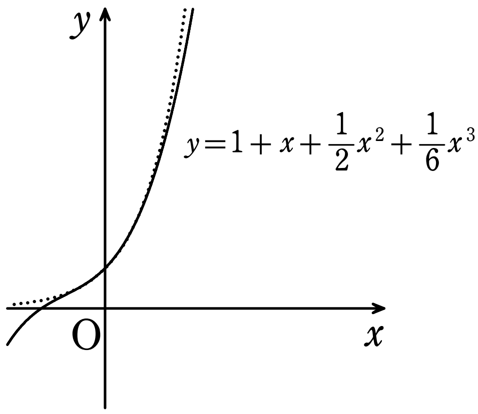
つまり、e^x という超越関数を普通の多項式で表現したというわけです。

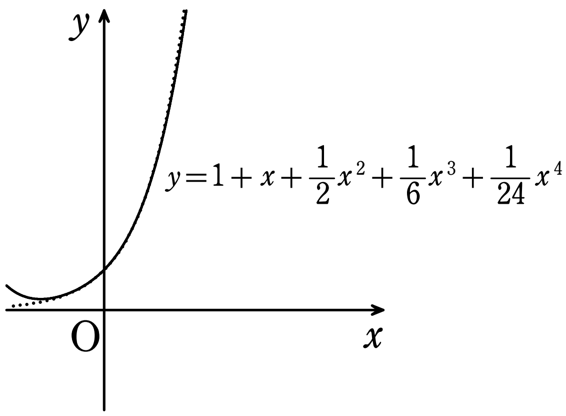
S：ほんとうにこの両者は同じになるのでしょうか。

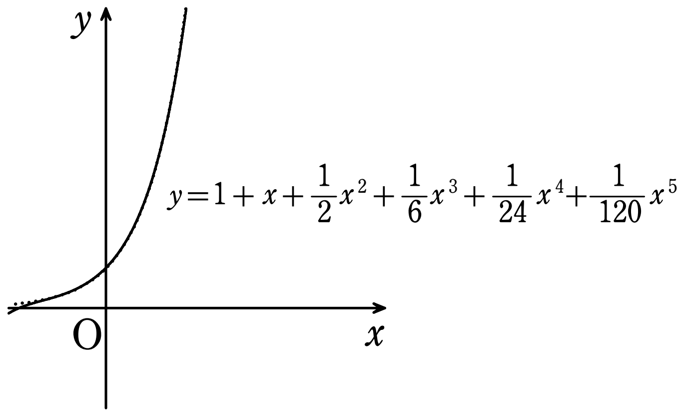
T：あくまでも x が０の近くで値を近似しているということです。いくつかの項で区切ったグラフを眺めて比較してみましょう。











T：図を見ると、$x=0$ において、２つのグラフの差はほとんどなくなっていくことがわかると思います。ここでちょっと面白いことをやてみましょう。先ほどの式、

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots$　において、x に１を代入してみましょう。どうなりますか。

S：$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$

T：そう。つまり、$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$ という e の近似式が得られました。電卓で計算した結果を示すと、

$\frac{1}{0!}=1$

$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}=2$

$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2.5$

$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2.666\cdots$

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2.708333\cdots$$

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2.71666\cdots$$

$e=2.718281828459\cdots$でしたから、かなり近い値を得ることができます。

S：では他の関数についてもやってみたいと思います。$sin x$ をマクローリン展開してみます。これは、$\int_0^x cos t\,dt$ を考えるのですね。

1	$cos\,t$
$t-x$	$-sin\,t$
$\frac{1}{2}(t-x)^2$	$-cos\,t$
$\frac{1}{6}(t-x)^3$	$sin t$

$$sin\,x=\left[(t-x)cos t+\frac{1}{2}(t-x)^2 sin t-\frac{1}{6}(t-x)^3 cos\,t-\frac{1}{24}(t-x)^3 sin\,t+\cdots\right]_0^x$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots$$

一応近似式が求まりました。