ICME 9
TOKYO/MAKUHARI 2000
Japan Society of Mathematical Education
Private Postbox No.18, Koishikawa Post Office, Tokyo 112 Japan/phone(03)3946-2267/fax(03)3946-3736

31

テーマ：２変数関数の極値

＝大学数学へのかけ橋＝
Visual 版 ④

＝テーマ＝
『２変数関数の極値』

＝極大と極小の定義＝

$z=f(x,y)$ と点 $P(a,b)$ について、
Pに十分近い（ε-近傍という）任意の点 $Q(x,y)$ に対し、

$f(a,b)<f(x,y)$

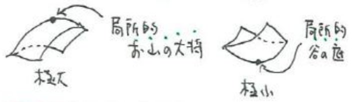
が成り立つとき 点Pを極小点、$f(a,b)$ を極小値という。

逆に $f(a,b)>f(x,y)$

が成り立つとき、点Pを極大点、$f(a,b)$ を極大値という。

One Point

極大値のことを L.Max（Local Maximum Value）極小値のことを L.Min（Local Minimum Value）といいます。つまり、極大値は、局所的に最大となっているところ、極小値は局所的に最小になっているところとイメージすればいいでしょう

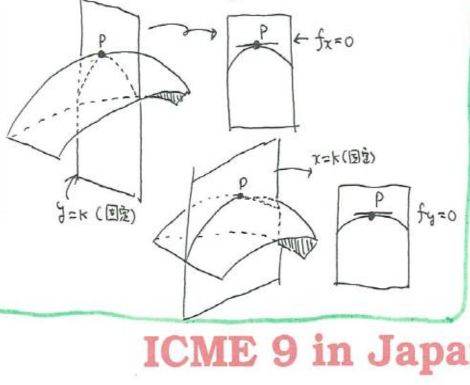


極値であるための必要条件

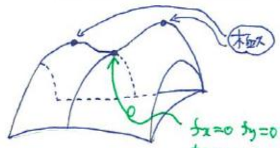
$P(a,b)$ が 極値であるならば

$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$(f_x=0,\ f_y=0)$



$f_x=0,\ f_y=0$ で極値とならない場合もある



鞍（あん）点、停留点といいます
（極点も停留点のひとつです）

２変数関数の極値の決定の仕方

全微分可能な関数 $z=f(x,y)$ 上の点 $P(a,b)$ が停留点（$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$）であるとき、

$f_{xx}(a,b)=A,\ f_{xy}(a,b)=B,\ f_{yy}(a,b)=C$

とおくと、

Ⅰ $B^2-AC<0$ のとき
　(i) $A<0$ なら $P(a,b)$ は極大点、
　(ii) $A=0$ なら $P(a,b)$ は極小点、
Ⅱ $B^2-AC>0$ のとき
　$P(a,b)$ は極点にならない
Ⅲ $B^2-AC=0$ のとき　判断不能

重要

２変数関数のテーラー展開を３項までとると、次の近似式が得られる

$$f(a+h,b+k)\fallingdotseq f(a,b)+(hf_x+kf_y)f(a,b)+\frac{1}{2}(hf_x+kf_y)^2f(a,b)$$

ここで、$k\to0,\ h\to0$ とすると、$(a+h,b+k)$ は点 (a,b) の近傍を表す

$x=a+h,\ y=b+k$ とおいて、

$$f(x,y)-f(a,b)\fallingdotseq \overbrace{(h\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{f_x}}}+k\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{f_y}}})f(a,b)}^{\text{ここは消える}}+\frac{1}{2}\underbrace{(hf_x+kf_y)^2}_{h^2f_{xx}+2hkf_{xx}+k^2f_{yy}}f(a,b)$$

ここで、$f_{xx}(a,b)=A,\ f_{xy}(a,b)=B,\ f_{yy}(a,b)=C$ とおくと、

$$f(x,y)-f(a,b)\fallingdotseq\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$
$$=\frac{k^2}{2}\left\{\underbrace{A\left(\frac{h}{k}\right)^2+2B\left(\frac{h}{k}\right)+C}\right\}\quad\text{—}(*)$$

これの定符号ならば (a,b) は極点になる!!

$\boxed{Y=\underbrace{AX^2+2BX+C}}$


$\Leftrightarrow$ $A>0$ かつ $B^2-AC<0$
このとき $Y>0$ $\therefore f(x,y)>f(a,b)$
$\therefore (a,b)$ は極小点。


$\Leftrightarrow$ $A<0$ かつ $B^2-AC<0$
このとき $Y<0$ $\therefore f(x,y)<f(a,b)$
$\therefore (a,b)$ は極大値


$\Leftrightarrow$ $B^2-AC>0$
このときは わからない