3 点を通る放物線と 2 点を通る直線の方程式

2016/05/14 下町 壽男

1　3 点を通る放物線

3点 (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , (x_3 , y_3)
を通る2次関数の決定

　求める 2 次関数の式を
$f(x) = ax^2 + bx + c$　とおく
$x = x_1$ から $x = x_2$ のときの平均変化率は

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) + b \quad \cdots ※1$$

同様に
$x = x_2$ から $x = x_3$ のときの平均変化率は

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = a(x_2 + x_3) + b \quad \cdots ※2$$

　これらはそれぞれの時間帯での平均の速さを表しています。
　さて、ここで※1 から※2 の間での平均変化率を考えると

$$\frac{a(x_2 + x_3) - b\{a(x_1 + x_2) + b\}}{x_3 - x_1} = a$$

となります。
これを表にしてみましょう。

x	x_1 ----------→ x_2 -------→ x_3	
y	y_1 ----------→ y_2 ------→ y_3	
Δ	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $= a(x_1 + x_2) + b$	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ $= a(x_2 + x_3) + b$
Δ^2	$\frac{a(x_1 + x_2) + b - \{a(x_2 + x_3) - b\}}{x_3 - x_1}$ $= a$	

　では、この方法で次の問題を解いてみましょう。

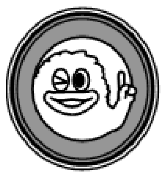
例題
3点 $(1 , 2)$, $(5 , 106)$, $(10 , 461)$ を通る
二次関数の方程式を決定せよ。

　数が大きいので、普通に 3 元連立一次方程式に持っていくのはイヤですね。
＜ポイントとなる表＞

x	1 ----------→ 5 -------→ 10	
y	2 ----------→ 106 ------→ 461	
Δ	$\frac{106 - 2}{5 - 1} = 26$	$\frac{461 - 106}{10 - 5} = 71$
Δ^2	$\frac{71 - 26}{10 - 1} = \frac{45}{9} = 5$	

＜解答＞
　$y = ax^2 + bx + c$ とおく　※
　　Δ^2 から、$a = 5$
　　Δ から、$5(1 + 5) + b = 26$
　よって、$b = -4$
　※が $(1 , 2)$ を通るので、
　　$5 - 4 + c = 2$
　よって、$c = 1$
　以上より、
　　$y = 5x^2 - 4x + 1$

あっさりと求まり、意味も納得！



2　2点を通る直線（賢治の公式）

宮澤賢治は、大正 10 年からほぼ 5 年間、農学校で数学を教えていたとされています。用いていた教科書は、「高等数学講座」（高木貞治他）だったようなのですが、その他に、「代数的解析本論」「微分積分精義」（河野徳助）などの本を勉強していたようです。

以前、賢治記念館で賢治のノートを見たら、そこには何と 20 種もの直線の方程式が記されていました。

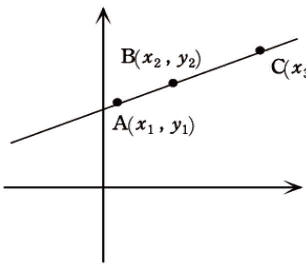
賢治が自ら発見したものなのか、それとも本から抜き出したものなのかわかりませんが高度なものも見られました。

私は、その時、筆記用具を持っていなかったので、記念館で手帳とボールペンを速攻で購入し、その場で全部の式を手帳に書き写しました（何とその後紛失！）。

では、その中から、私が興味を持ったものを一つ紹介したいと思います。

(Vol.Ⅱ)

$$(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)=0 \quad [12]$$



〔12〕とあるので、第 12 番目の直線の方程式ということでしょう。奇妙な形をした式なのですが、一体この式にはどんな意味があるのでしょう。分かりやすいように、式を変形してみましょう。

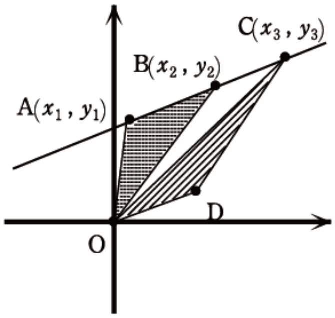
$$-x_3(y_2-y_1)+y_3(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

$$x_3(y_2-y_1)+y_3(x_2-x_1)=(x_1y_2-x_2y_1)$$

$$\frac{1}{2}\{x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)\}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) \quad ※$$

※のように変形すると、意味が見えてきます。$D(x_2-x_1, y_2-y_1)$ とおくと、

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$　なので、※の左辺は△OCD の面積、※の右辺は△OAB の面積を表します。



㊟　実際は「符号付面積」

参考

$\overrightarrow{OX}=(p, q)$, $\overrightarrow{OY}=(r, s)$ のとき

$\triangle OXY=\frac{1}{2}|ps-qr|$

ここで、C は直線 AB 上の任意の点なのでもう少しこの式を使いやすくするために、$C(x, y)$ とし、C を動点と見ることにしましょう。すると、次のような式になります。

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=x_1y_2-y_1x_2 \quad ※※$$

新しいタイプの「2 点を通る直線の方程式の公式」が出来上がりました。「賢治の公式」と名づけておきます。

では、具体例を解いてみましょう。

例1　2点A(1 , 3) , B(5 , 8) を通る直線の方程式を求めよ。

（求め方）

B(5 , 8)
╳ ― $5\times3-8\times1=7$　①
A(1 , 3)

D(4 , 5)
╳ ― $4y-5x$　②
P(x , y)

①②より　$4y-5x=7$　圏