2012 年 7 月　杜陵サークルレポート

Stirling 数と Bell 数をあなたに

〜井ノ口順一氏のレポートを読んで〜

日本ヘキソミノパズル普及会会員　下町　壽男

1　はじめに

井ノ口順一氏（山形大学理学部数理科学科教授）は，広才博識，該博深遠，恐ろしいほどに博覧強記の人物である．

学者でありながら，アカデミックからサブカルチャー，古典からトレンド，マルクスから赤塚不二夫と，硬軟とりまぜ広範な領域をカバーする．読書百遍，韋編三絶である．

更に，小中高初等教育における「世直し運動」や市民に対しての数学啓蒙活動も秘かに行っている（別に秘かにではないか）．デンマークにいっていたかと思うと，AMI の合宿研に参加して辛口の数学教育評論を行っていたり，東工大で集中講義を行った翌日に岩手に現れレポート発表などもする．時に，杜陵サークルに大学生を送り込むという草の根運動も行っているのも周知のところであろう（話が超ローカルになった．すまぬ）．

まあ，いいたいことは，彼は，まったくもって他の追随を許さぬ，百家争鳴，七転八倒，抱腹絶倒，言語道断横断歩道，微分積分可積分幾何なわけである（意味不明）．

さて，そんな井ノ口氏が 2011 年の第 24 回 AMI 合宿研の講座で話された「源氏香」の話を踏まえて，スターリング数（第 2 種スターリング数）と，ベル数について，高校教師の視点でまとめてみようと思う．

2　第 2 種スターリング数

異なる n 個のものから， r 個のグループに分けるやり方の総数を第 2 種のスターリング数といい， $S(n,r)$ で表す.

異なる n 個のものから r 個取り出す取り出し方の総数は，${}_nC_r$ とかくので，これにならって，以後　$S(n,r)={}_nS_r$　と表すことにしよう．ここで，${}_nS_n=1$，${}_nS_0=0$ である．

例　5 人を 2 組に分けるやりかたの総数は何通りか

①　1 人 4 人の場合　${}_5C_1\times{}_4C_4=5$ 通り

②　2 人 3 人の場合　${}_5C_2\times{}_3C_3=10$ 通り

①②より ${}_5S_2=5+10=15$ 通り

例　6 人を 3 組に分けるやりかたの総数は何通りか

①　1 人 2 人 3 人の場合　　${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=60$ 通り

②　1 人 1 人 4 人の場合　　${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\div 2!=15$ 通り（2 で割るのに注意）

③　2 人 2 人 2 人の場合　　${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\div 3!=15$ 通り（3!で割るのに注意！）

①②③から，${}_6S_3=60+15+15=90$ 通り．

何とかコンビネーションの計算で求められる．しかし，組の人数が異なる場合と，そうでない場合とで，計算の仕方が異なるため，ひょいひょいと求めることはできない．例えば，10 人を 5 つのグループに分ける方法の総数を求めよといわれれば，大変な場合分けと計算をしなければならない．何とかうまい方法はないだろうか．

コンビネーションでは次の定理が有名である．

【定理１】

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r $$

＜証明＞

n 個から r 個選ぶとき，特定のある 1 個に注目する

ｉ）特定の 1 個が選ばれる場合

残りの $n-1$ 個から $r-1$ 個選べばよいので，選び方の総数は ${}_{n-1}C_{r-1}$

ⅱ）特定の 1 個が選ばれない場合

残りの $n-1$ 個から r 個選べばよいので，選び方の総数は ${}_{n-1}C_r$

ｉ，ⅱより，${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$（示した）

この定理を使えば，次のような操作（パスカルの三角形）によって，次々と ${}_nC_r$ の値を生成することができる．

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

${}_nS_r$ でも同じことができないだろうか．井ノ口氏のレポートに次の式がある．

【定理２】

${}_nS_r = {}_{n-1}S_{r-1} + r\,{}_{n-1}S_r$　が成り立つ．ただし ${}_0S_0 = 1$ とする．

これはうまい方法だ．定理１と同じような方法で証明してみよう．

＜証明＞

n 個から r 個の組に分ける時，特定のある 1 個に注目する

ｉ）特定の 1 個が単独で 1 組になっている場合

残りの $n-1$ 個から $r-1$ 個組を分ければよいので，その分け方の総数は ${}_{n-1}S_{r-1}$

ⅱ）特定の 1 個が単独で 1 組になっていない場合

残りの$n-1$個からr個組を分ける方法の総数は${}_{n-1}S_r$　そのr個の組のどれかに特定の1個を入れればよいので，その総数は$r\,{}_{n-1}S_r$

ｉ，ⅱより　${}_nS_r={}_{n-1}S_{r-1}+r\,{}_{n-1}S_r$　（示した）

このことから，次のような「重みつき」パスカルの三角形をつくることで，${}_nS_r$を次々生成していくことができる.

$$1$$
$$1 \qquad 1_{\times 2}$$
$$1 \qquad 3_{\times 2} \qquad 1_{\times 3}$$
$$1 \qquad 7_{\times 2} \qquad 6_{\times 3} \qquad 1_{\times 4}$$
$$1 \qquad 15_{\times 2} \qquad 25_{\times 3} \qquad 10_{\times 4} \qquad 1_{\times 5}$$
$$1 \qquad 31_{\times 2} \qquad 90_{\times 3} \qquad 65_{\times 4} \qquad 15_{\times 5} \qquad 1_{\times 6}$$

（エクセルで作成した表）

n＼r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	5
4	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	15
5	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	52
6	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	203
7	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	4140
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	21147
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	115975

３　ベル数

異なるn個のものをグループに分けるやり方の総数をベル数といい，$B(n)$で表す.

つまり，第2種スターリング数の合計がベル数である.

$B(n)={}_nS_0+{}_nS_1+{}_nS_2+{}_nS_3+\cdots+{}_nS_n$

上のエクセルの表の合計に$B(n)$が現れていることに注意しておこう.

５つのものをグループ分けする総数　$B(5)=1+15+25+10+1=52$は，源氏香といわれる5種類の香組の総数に登場する数である.

エクセルで作ってみたが（次ページ）結構感動する．尚，$B(5)=52$が，源氏物語 54 帖に近い数ということで源氏香というのかと思うが，考えてみれば，ジョーカーを除いたカード（トランプ）の枚数はぴったり 52 枚なので，こちらに対応させてみても面白い.

桐壷JK	▲S(5,5)① 帚木♥A (1)(2)(3)(4)(5)	●S(5,4)① 空蝉♥2 (1)(2)(3)(4,5)	●S(5,4)② 夕顔♥3 (1)(2)(3,4)(5)	■S(5,3)① 若紫♥4 (1)(2,3)(4,5)	★S(5,2)① 末摘花♥5 (1,2,3,4)(5)	■S(5,3)② 紅葉賀♥6 (1)(4)(2,3,5)	●S(5,4)③ 花宴♥7 (1)(2)(3)(4)(5)
●S(5,4)④ 葵♥8 (1,2)(3)(4)(5)	★S(5,2)② 賢木♥9 (1,2,3)(4,5)	■S(5,3)③ 花散里♥10 (1)(2,4)(3,5)	★S(5,2)③ 須磨♥J (1,3,4)(2,5)	●S(5,4)⑤ 明石♥Q (1)(2,3)(4)(5)	■S(5,3)④ 澪標♥K (1)(3)(2,4,5)	■S(5,3)⑤ 蓬生♠A (1,2,3)(4)(5)	■S(5,3)⑥ 関屋♠2 (1)(2,3,4)(5)
■S(5,3)⑦ 絵合♠3 (1,2)(3,5)(4)	■S(5,3)⑧ 松風♠4 (1,2)(3,4)(5)	★S(5,2)④ 薄雲♠5 (1)(2,3,4,5)	■S(5,3)⑨ 槿♠6 (1,3,4)(2)(5)	●S(5,4)⑥ 乙女♠7 (1,3)(2)(4)(5)	★S(5,2)⑤ 玉鬘♠8 (1,2)(3,4,5)	■S(5,3)⑩ 初音♠9 (1,3)(2,4)(5)	★S(5,2)⑥ 胡蝶♠10 (1,4)(2,3,5)
■S(5,3)⑪ 蛍♠J (1,2,4)(3)(5)	■S(5,3)⑫ 常夏♠Q (1)(2)(3,4,5)	●S(5,4)⑦ 篝火♠K (1)(2,4)(3)(5)	■S(5,3)⑬ 野分♦A (1,2)(3)(4,5)	★S(5,2)⑦ 行幸♦2 (1,3)(2,4,5)	●S(5,4)⑧ 藤袴♦3 (1,4)(2)(3)(5)	■S(5,3)⑭ 真木柱♦4 (1,5)(2,4)(3)	★S(5,2)⑧ 梅枝♦5 (1)(2,3,4)(5)
■S(5,3)⑮ 藤裏葉♦6 (1)(2,5)(3,4)	★S(5,2)⑨ 若菜上♦7 (1,2,5)(3,4)	■S(5,3)⑯ 若菜下♦8 (1,3)(2)(4,5)	■S(5,3)⑰ 柏木♦9 (1,3,5)(2)(4)	■S(5,3)⑱ 横笛♦10 (1,4,5)(2)(3)	■S(5,3)⑲ 鈴蟲♦J (1,5)(2)(3,4)	■S(5,3)⑳ 夕霧♦Q (1,4)(2)(3,5)	■S(5,3)21 御法♦K (1)(2,3,4)(5)
●S(5,4)⑨ 幻♣A (1,5)(2)(3)(4)	★S(5,2)⑩ 匂宮♣2 (1,2,4)(3,5)	●S(5,4)⑩ 紅梅♣3 (1)(2,5)(3)(4)	★S(5,2)⑪ 竹河♣4 (1,5)(2,3,4)	★S(5,2)⑫ 橋姫♣5 (1,3,4,5)(2)	■S(5,3)22 椎本♣6 (1,4)(2,3)(5)	★S(5,2)⑬ 総角♣7 (1,4,5)(2,3)	■S(5,3)23 早蕨♣8 (1)(2,3,4)(5)
★S(5,2)⑭ 宿木♣9 (1,2,4,5)(3)	■S(5,3)24 東屋♣10 (1,2,5)(3)(4)	■S(5,3)25 浮船♣J (1,5)(2,3)(4)	★S(5,2)⑮ 蜻蛉♣Q (1,3,5)(2,4)	▼S(5,1)① 手習♣K (1,2,3,4,5)	夢浮橋JK		

ベル数を，スターリング数を経ずに，もっと簡単に求める手法はないだろうか.

ここで，次の定理がとても強力である.

【定理３】

$$\boxed{B(n+1) = {}_nC_0B(0) + {}_nC_1B(1) + {}_nC_2B(2) + \cdots + {}_nC_nB(n)}$$

頑張って証明してみよう.

＜証明＞

$n+1$ 個の組分け $B(n+1)$ を考える.

特定の１個 a に注目する.

ⅰ）特定の１個 a が単独の組になっている場合

組分けの総数は，n 個の組分けのそれぞれに a を付加しただけなので，$B(n)$ である.

ⅱ）a ともう１つのもののペアが組となっている場合（a ○型）

a のペアノ決め方の総数は ${}_nC_1$ 通り．そのおのおのに対して，残りの $n-1$ 個の組分けの総数は $B(n-1)$ 通り．よって，求める組分けは　${}_nC_1B(n-1)$

ⅲ）a を含め，３つのものが組となっている場合（a ○△型）

a 以外の２つのものの決め方の総数は ${}_nC_2$ 通り．そのおのおのに対して，残りの $n-2$ 個の組分けの総数は $B(n-2)$ 通り．よって，求める組分けは　${}_nC_2B(n-2)$

以下同様に考えて $B(n+1)$ を求めると

$$B(n+1) = {}_nC_0B(n) + {}_nC_1B(n-1) + {}_nC_2B(n-2) + \cdots + {}_nC_nB(0)$$

ここで，${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を適用すれば

$$B(n+1) = {}_nC_0B(0) + {}_nC_1B(1) + {}_nC_2B(2) + \cdots + {}_nC_nB(n)$$　（示した）

では，定理３を利用してベル数を求めてみよう.

手順①

１	１
	２

手順②

１	１	２
	２	３
		５

手順③

１	１	２	５
	２	３	７
		５	１０
			１５

手順④

１	１	２	５	１５
	２	３	７	２０
		５	１０	２７
			１５	３７
				５２

手順①　1+1=2

手順②　2 を上に．1+2=3 , 2+3=5

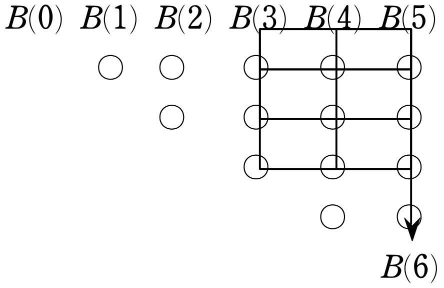
手順③　5 を上に．2+5=7 , 3+7=10 , 5+10=15

手順④　15 を上に．5+15=20 , 7+20=27 , 10+27=37 , 15+37=52

以下繰り返すと，１行目と対角線にベル数　1,1,2,5,15,52…が次々生成される.

● 参考

例えば，図で $B(6)$ において $B(3)$ が足される回数を考えると，ちょうど道順の総数 ${}_5C_2$ に対応していることがわかる．（これはライプニッツのアイデアに似ている．と思う.）



4　おまけの話題

私が大学時代，組合せ論の講義を受けていた（結構休講が多かった）山本幸一氏の著書に，第１種スターリング数と第２種スターリング数について，次のような記述があった．

> スターリング数は，ジョルダンの階乗記号と，普通のべき乗の間の１次関係を表すものである．まず，
>
> ジョルダンの階乗記号　$(x)_n = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)$
>
> を x の多項式として，$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}x^k = S_{n,0} + S_{n,1}x + \cdots + S_{n,n}x^n$　と書くとき，$S_{n,k}$ が第１種のスターリング数である．
>
> また，逆に x のベキ乗 x^n をジョルダンの階乗記号によって
>
> $x^n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}(x)_k = s_{n,0} + s_{n,1}(x)_1 + \cdots + s_{n,n}(x)_n$　と書いたときの $s_{n,k}$ が第２種のスターリング数である．（「順列・組合せと確率」／山本幸一／岩波書店）

これを参考に，高校生向けの恒等式の問題をつくってみた．

【問題】$n^5 = a\,{}_nP_1 + b\,{}_nP_2 + c\,{}_nP_3 + d\,{}_nP_4 + e\,{}_nP_5$ が恒等式になるように a,b,c,d,e を決定せよ．

＜解答＞（少しずるい方法）

$n^5 = an + bn(n-1) + cn(n-1)(n-2) + dn(n-1)(n-2)(n-3) + en(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$n=1$　として，$a=1$．　$n=2$　として，$2^5 = 2+2b$　よって　$b=15$．

$n=3$　として，$3^5 = 3+6\times15+6c$　よって $c=25$．

$n=4$　として，$4^5 = 4+12\times15+24\times25+24d$　よって $d=10$．

視察により $e=1$ は明らか．よって $n^5 = {}_nP_1 + 15\,{}_nP_2 + 25\,{}_nP_3 + 10\,{}_nP_4 + {}_nP_5$　と推察できる．

このとき，右辺を展開して左辺と比較すると恒等式となることがわかる．

重複順列の総数が，第２種スターリング数を係数とする順列の和になるなんて美しいなあ．

（しもまちひさお／2012/07/03）