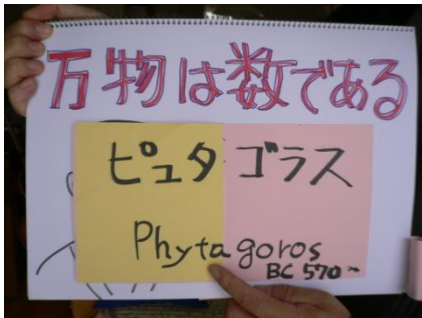


2010 3月 全国高校研究集会 (東京女子学園)  
 すべての高校生にまことの数学を！  
**写真と図で振り返る**  
**「生徒にまことの数学を」**  
 青森県立八戸西高等学校 下町壽男

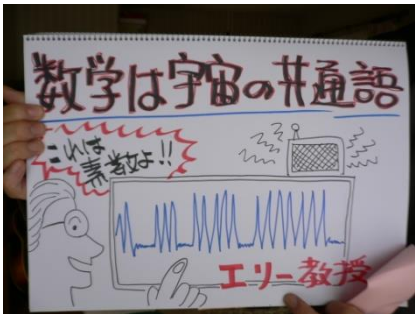
■ 紙芝居で「本日のメニュー」



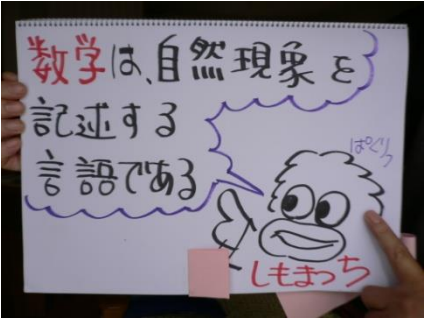
★「万物は数である」と言った人は誰でしょう。  
 私はピタゴラスだと思っていたんだけど、  
 どうも違うらしいですよ。」



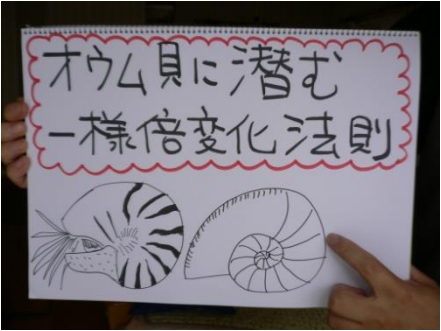
★実は「ピュタゴラス」(笑)



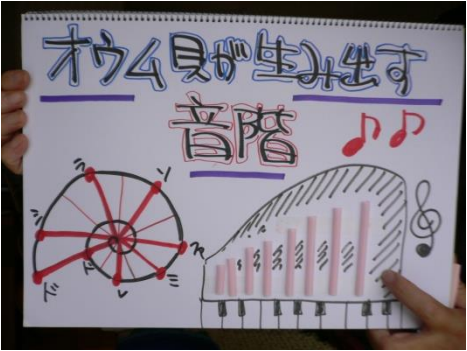
★映画「コンタクト」のエリー教授はいいました。「英語は地球のおよそ3割の共通語。でも、  
 数学は宇宙の共通語 (Math. is only true universal language ) だ」



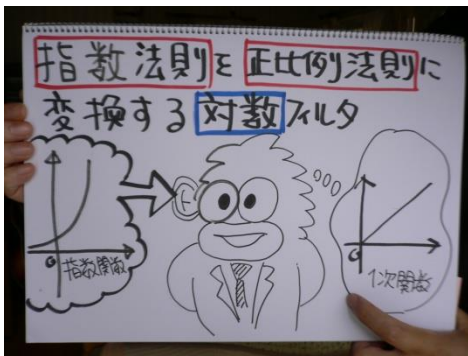
★そしてしもまちはいいました。  
 数学は自然現象を記述する言語である！



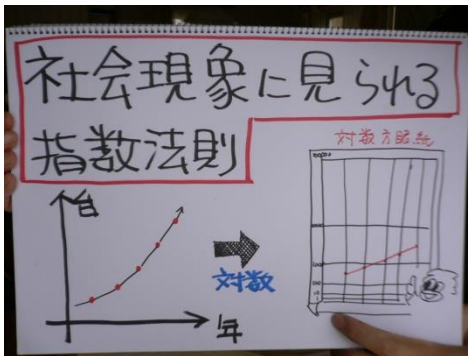
★今日の授業はオウム貝に潜む指数関数がメインテーマです。



★空気が振動すると人間の鼓膜も同じように振動します。それが脳に伝わり「音」として認識されます。振動数が大きい(1秒間に空気が振動する回数が多い)と「高い音」と感じ、振動数が小さいと「低い音」と感じます。  
 私たちが慣れ親しんでる「平均率」といわれ音階をオウム貝を使って作ってみましょう。



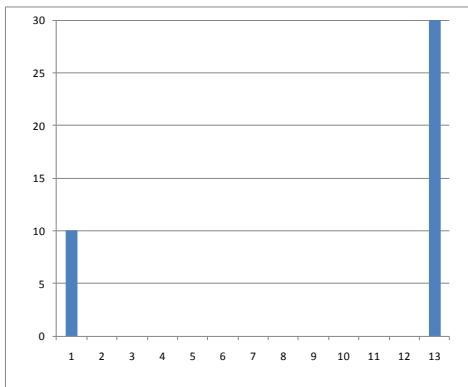
★指数法則を正比例法則に変換する規則として「対数」を考えます。人間の体は一つの対数フィルタといってもいいでしょう。



★最後に対数方眼紙というフィルタを使って、社会現象に見られる指数法則を調べてみましょう。

### ■ オウム貝と一様倍変化法則

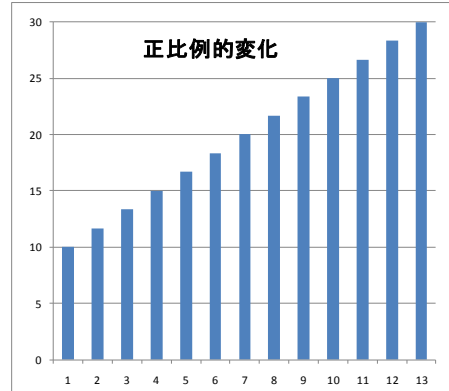
図のような、12ステップで3倍に成長する「不思議な棒」があります。



この棒の成長の過程として次の2つを考えてみます。

### 1 正比例法則

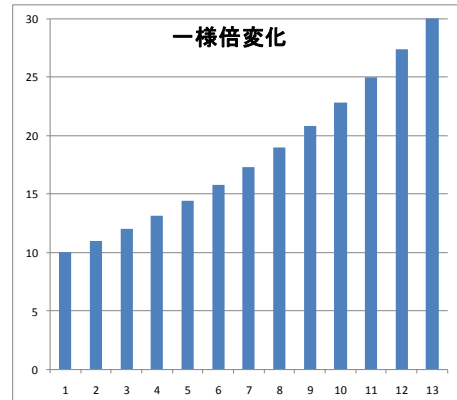
毎回一定の値ずつ増加する等差数列的的法則です。



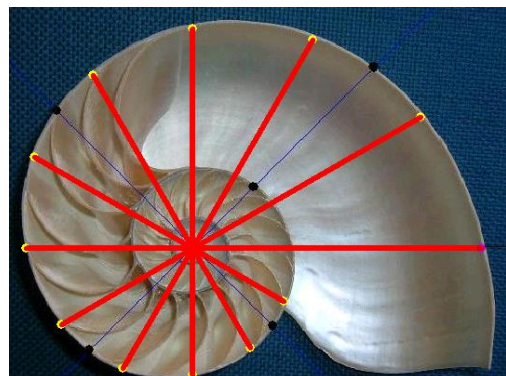
### 2 一様倍変化法則

毎回一定の割合で増加する等比数列的的法則です。12ステップで3倍

になるためには、毎回 $3^{\frac{1}{12}}$ 倍されていくことになります。



鳥羽水族館にあるオウム貝の断面です。



2の一様倍変化する12本の棒を、30°刻みに重ねてみると、何と！12本の動径がぴったりと重なりました。つまりオウム貝の中心からの半径は指数関数 $3^x$ に従って変化していることがわかります。



オウム貝の成長曲線が指数関数的であることは、偶然や神秘という言葉で片付けられるものではなく、「瞬間の成長率はそれまでの蓄積量に比例する」という原理(仮説)を、 $y' = ky$ という微分方程式にすることで導かれると考えられます。

$$y' = ky$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx$$

$$\log y = kx + C$$

$$\therefore y = e^{kx+C}$$

### ■ オウム貝が生み出す音階

では、オウム貝の動径にあわせた長さのストローを切って笛を作り、オウム貝の音階を聞いてみましょう。

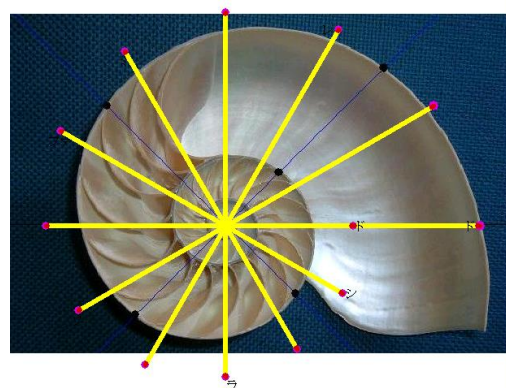


オウム貝の場合は隣り合う2項の比が $\frac{1}{3^{1/12}}$ 、つまり12音で振動数が3倍になるので、実際の平均率とは違う音階になりましたね。でも結構イケる音階です。

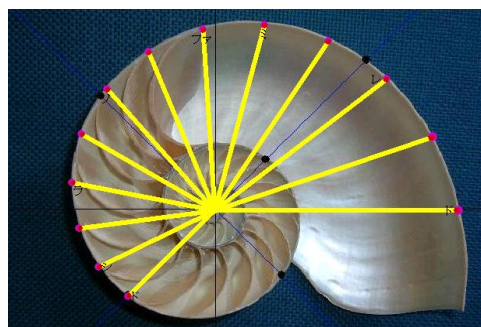
ではこのオウム貝から平均率の音階を作るにはどうすればいいでしょうか。

平均率は、12音で振動数が2倍になるので、 $y = 2^x$ を考えなければなりません。すると別の種類のオウム貝を準備しなければならないでしょうか。

いいえ大丈夫。このオウム貝からちゃんと作ることができるのです。



12本の動径を1回転して2倍になるようにしてみました。もちろんオウム貝とは重なりませんね。



ところが、動径の間隔の角度を30°から19°に変えてみるとあら不思議、12個の動径はオウム貝にぴったりと重なりました。なぜでしょう。

そう。これは底の変換です。  $2 = 3^{\log_3 2}$  で、  $\log_3 2$  は約  $0.63$  なので、  $30^\circ \times 0.63 = 18.9$  から約  $19^\circ$  間隔にすればよいのです。

$$(y = 2^x = (3^{\log_3 2})^x = 3^{0.63x})$$

このように、間隔を変えれば、どんな底の指数関数もオウム貝の中に実現できることがわかります。



### ■ 対数フィルタ(フェイターの法則)

音階では 12 音の間隔が指数関数的なのに、等間隔に音が高くなっていくように思いませんか。ではここで実験をしてみます。

普通の平均率の音階と、12 音の振動数が等間隔になっている音階と聞き比べてみる。

人間の感覚は、指数関数的刺激を、一次関数的に受け取るようになっているような気がしませんか。

### ■ 対数方眼紙の利用

$y = f(x)$  が指数関数であると

$$g(x) = \log_{10} f(x)$$

とすると、 $y = g(x)$  は一次関数になります。ということは、ある現象が指数関数に従うかどうかを調べるには、対数をとった関数が直線になっているかをみれば

いいことがわかります。

ここで、最初から  $y$  軸の目盛を対数目盛りに歪めておけば、常用対数をいちいち調べる必要はなくなります。

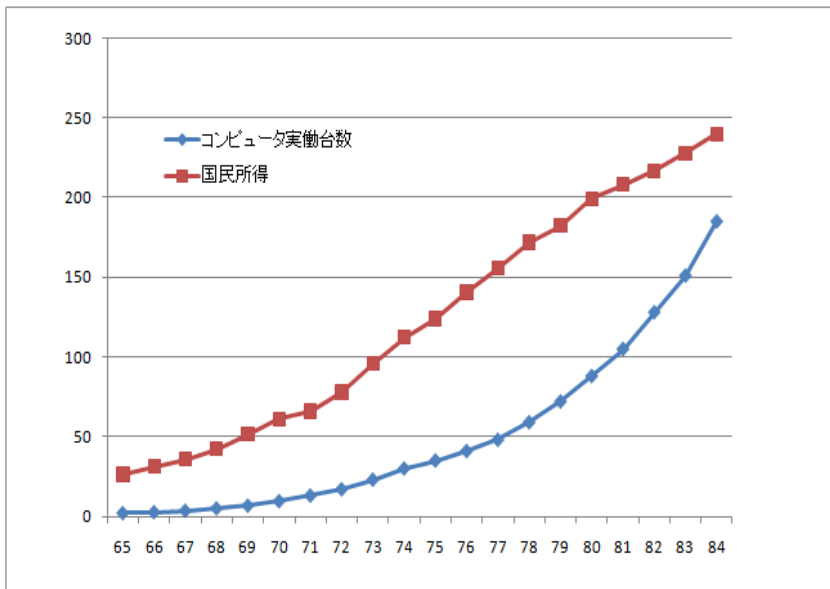
これが対数方眼紙(片対数方眼紙)です。

では、対数方眼紙を利用して、ある社会現象に潜む指数法則を見つけ、考察してみましょう。ここで取り上げる実践は、東大名誉教授であった森口繁一先生が、以前数学セミナーで紹介されたものです。かなり古いデータですがご容赦下さい。

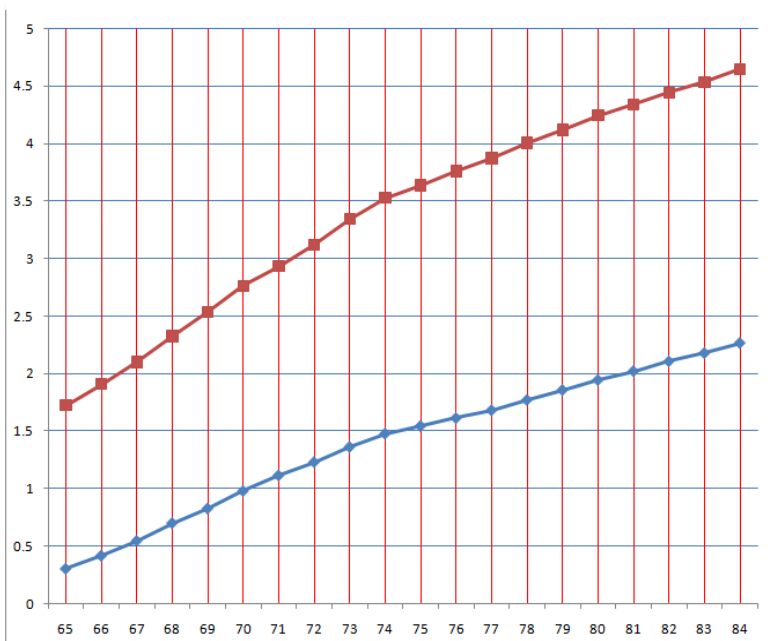
- 汎用コンピュータの実働台数(単位 1000 台・1985 コンピュータ白書より) と国民所得(単位 100 億円 1985 経済白書より)

実働台数		国民所得	
年度	台数	年度	所得
1965	2	1965	263.9
1966	2.6	1966	310.92
1967	3.5	1967	359.11
1968	5	1968	423.29
1969	6.7	1969	514.22
1970	9.5	1970	610.3
1971	13	1971	659.11
1972	17	1972	779.37
1973	23	1973	958.4
1974	30	1974	1121.72
1975	35	1975	1239.91
1976	41	1976	1405.97
1977	48	1977	1557.03
1978	59	1978	1717.79
1979	72	1979	1822.07
1980	88	1980	1993.33
1981	105	1981	2081.57
1982	128	1982	2168.59
1983	151	1983	2279.15
1984	185	1984	2397.57

これを普通のグラフにプロットしてみましょう。



このグラフを見てもあまり法則性が見えませんか。では、これを対数方眼紙にプロットしてみましょう。



これを見ると、国民所得とコンピュータの実働台数の間に何らかの相関ありそうということ、どちらも指数関数的に変化していること、1974年を境に直線の傾きが変化していることなど様々なことを見て取ることができます。

例えば次のように考えることもできるでしょう。

「日本の経済成長は指数関数的に変化していて、コンピュータの実働台数の変化はその象徴である。1974年にオイルショックがあり、日本は高度経済成長期から低成長期に移行することがこのグラフからわかる」

## ■ 後日談

この模擬授業に参加して下さった、石川県教育センターの室陽子先生から後日メールがあり、今回の模擬授業の内容を初任者研修の学習指導の講座で使いたいとのことでした。授業で使ったデータファイルを送ったところ、次のような報告をいただきました。室先生から了解を得ましたので、紹介させていただきたいと思います。

「オウム貝から音階を作ろう」と題して、高校数学の初任者の先生10名に体験していただきました。

- ①オウムガイの写真に30°ごとの中心から貝殻までの線分を引いておき、A3に拡大して配布しました。
- ②0°の動径(?)の長い方が21 cm、短い方が7 cmといい感じになっています。(これはストローの長さにも適っています)
- ③他の線分の長さを測っていただきグラフで底が3の指数関数らしいことを確かめ、下町先生が模擬授業で説明された、自分自身の大きさに成長率が比例する微分方程式を解いてもらいました。
- ④次に平均律音階の説明をして、底を3から2へ変えるために $x$ を $0.63x$ にすればよいことを導き $360^\circ \times 0.63 = 227^\circ$ の線分を測れば14 cmとなって7 cmの2倍になっていることが確認できます。
- ⑤他の線分も回転角の0.63倍の角度での長さを測ります。
- ⑥そして、ストローをこの長さ+1 cmに切ります。1 cm分はストロー笛のリードを作るためです。
- ⑦ストローでは音を出しにくいと思ったので、試験管に水をいれて吹いてもらうとか、ゴムなどで弦を張りならしてみるとか考えたのですが、音楽の指導主事からストロー笛(インターネットに出ています)のアイデアをもらいました。

⑧1 cm分を斜めに切り、OHPシートのようなものでリードを作ってつけます。ビ〜とかブ〜とかかなり大きな音がします。

結果は.....半音階を除く音を1人1本作ってもらい順にふいてもらいましたが、ラ・シ・ドあたりしか音階になりませんでした。吹き方で音程も変わり難しかったかもしれません。また、リードをつけたときの誤差(?)が結構あるのかもしれません。

失敗したときのために、14 cmのストローに他の音階の長さを記しておいたので、はさみで切りながら吹いて音階を鳴らしたら拍手をもらいました(笑)

高校数学では、内的活動が多く、このような外的活動は初任者もあまり経験していないと思い、外的活動を中心とした教材・教具の1つとして研修に取り入れました。

初任者のアンケートをみると、「工夫次第で数学でたくさんの教材が使えると思った。これをどう授業に活かすかが課題」「体で感じる学習のさせ方を体感できてよかった」「現実世界の題材を使って数学を学習したことがあまりなかったのでよい経験になった」「高校数学の授業のイメージが変わった」などの記述がありました。

自分自身も、下町先生の模擬授業でたくさんのヒントをいただきました。おかげでよい研修ができたと思っています。本当にありがとうございました。

また、機会がありましたら、よろしく願いいたします。

Shimomachi-toshio@r01.asn.ed.jp

しもまちひさお/杜陵サークル