53　２次不等式に見る受験学力の実態

単元等　数学Ⅰ　二次関数（二次不等式）

授業論・指導技術

◆Contents

・二次方程式の２つの解法

・差異を強調するか共通性に着目するか

・受験学力の実態（西林克彦）

１　授業の内容

(1)二次不等式のミニテスト

(2)解が一般的でない２次不等式について

２　授業を見ての所感

先日は個別訪問で，授業を見せていただきありがとうございます．先生の授業を見て感心したことは，毎日ミニテストを実施して既習事項の定着を図っていること，そして，毎時間生徒に，本時の目標と振り返りを書かせ，自身の授業へのフィードバックを考えていた点です．

校内に「凡事徹底」という貼り紙がありましたが，学力の向上は，魔法の薬のようなものでいきなり実現されるのではなく，まさに先生が行われているような，日々の積み重ねこそが，生徒の着実な進歩を生むのだとあらためて感じました．

また，「生徒との対話を大事にしたい」ということで，期間巡視による個別指導を積極的に行い，個々の生徒のつまづきへのきめ細かな配慮を行っていたことも印象に残りました．

３　補足すること

私は，個別訪問を行った授業者の先生に，所感として教材研究ネタなどを中心に，私が思うところを述べて送付させていただいておりました．

今回は，二次不等式の指導に関わって，いくつかコメントをしたいと思います．

二次不等式の解法における２つの考え

二次不等式の解法には２つの考え方があると思います．一つは，実数の性質「２数の積が正ならば同符号，負ならば異符号」として，代数的に解いていく方法です．しかし，積の形に変形できない（因数分解できない）ときには，(実数)²≧0 という，また別の実数の性質を用いることになるのが悩ましいところですね．

もう一つの考え方は，２次関数のグラフを使う方法です．教科書に書かれているのがこの方法です．これならば，すべての場合を網羅して統一的に考えることができます．

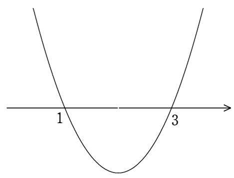
先生も，グラフを用いて丁寧に指導されていましたが，先生の授業の中で感心したことは，２次不等式が，ある x で成り立つかどうかを，グラフを利用し，生徒に真偽をいわせながら解説をしていたところです．つまり，２次不等式を，x の１つの値に対し，真偽が決定する「命題関数」と見て，その真理集合が不等式の解であるという高い視点での授業だったと思います．

パターン化すること

グラフで説明することに対して，次のような疑問を唱える人もいます．

「グラフで考えると，$x^2-4x+3>0$ ならば，

$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ から，

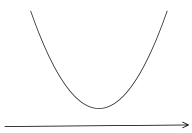


左図のようなグラフになるので，$x<1, 3<x$ と解ける．

ところが，$x^2-4x+6>0$ のときは，

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ として

下図のようなグラフを描いて，「すべての数」



としている．ある時は因数分解，あるときは平方完成，その判断はどこでやるのだ．」

また，こんな疑問もあります．

「$2x^2-3x+6>0$　なんていう問題の時も平方完成するのか．」

このような疑問を述べる人たちの多くは，

グラフで取りあえずは説明するけれど，すぐ，パターンで覚えさせる方向で指導するのではないかと思います．

このような質問は，二次不等式を教える時に，その概念の指導を主とするのか，それとも，問題解法の技術を主とするのかということに関わる重要な事柄なのではないかと思います．

「二次不等式はどんな場合であれ，グラフと x 軸の関係から見通すことができる」という概念さえきちんと指導すれば，細かい問題への対応は，生徒が個々に考えたり，納得したりして進むものではないかと思います．また，この概念は二次不等式だけではなく，どのような不等式にも貫かれている考え方なので，他の単元にも応用することができます．

理念なく，解法技術を能率的に次々教え込むことは，生徒が自分で考えることを奪いかねません．

ですから，私は，先に述べた問題に関する質問には次のように答えます．

「$x^2-4x+3>0$ も，$x^2-4x+6>0$ も $2x^2-3x+6>0$ も，すべてグラフを考えることで解決できる．後は，グラフの書き方の問題である．2 次関数を $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 型でまとめるか，$y=a(x-p)^2+q$ 型にするか，あるいは，x 軸との位置関係を調べるために D を計算するか．これらは皆『グラフを簡便に描く』という動機や戦略の下で，初めて意識的に考えるものである．そこを，グラフの概念を抜きにしてパターンにしてしまうのは，テスト直前何日かの蓄え程度にしかならない」

差異を強調するか共通性に着目するか

今，私が多くの授業を見て思うことは，「一見違う問題にみえるが実は同じ構造である」よりも，「一見同じように見えるけれど違う構造である」に力点を置いたものが多いということです．

確かに，いろいろなタイプの問題を提示して，それに対応する解法を細かく提示することは，生徒に親切であるように思えます．しかし，それが，「原理・構造」より「公式・ノウハウ」(「公式の良さ」と「定着指導」という名の下に) に傾いた指導であれば，同じ構造の問題を見抜く能力が育たないのではないかとも思うのです．

具体例をあげてみます．

中学校 1 年で，数の構造として，交換法則と結合法則を学びます．その授業の中心は

$7\times(-2)\times(-3)\times5$　などという問題を，

「マイナスが 2 個なので，積は正． 2 と 5 を先にかけて $2\times5\times7\times3=210$　とする」という計算練習主体の授業展開になります．つまり，結合法則によって，3 個以上の数の乗法が，2 つの演算に収斂することや，結合法則と交換法則を適用することで， 5 を 2 の隣に持っていく過程などの，構造としての面白さではなく，計算を便利にするための便法，つまり「有用性」への一里塚という観点で，これらの概念が提示されるわけです．すると生徒は，「原理や法則」とは「公式」と同じものだと認識してしまうのではないかと思うのです．

また，今年の学力検査の 2 次方程式の問題 $x^2-6x+9=0$ は，昨年度の問題 $x^2-7x+12=0$ と比べ，正答率が 10%以上低くなっています．平均点は昨年より上回っているのにです．また全体得点率 75%以上の生徒を見ても昨年度は 1 人も間違えていないのに対し，今年度は 5 %もの生徒が間違えています．私から見れば，どちらも同じ構造の問題と思うのですが，私が見た授業のほとんどが，

1 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

2 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

3 $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

4 $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

という 4 つの公式を独立して教えていき，問題を見て「何番の公式で解くか」という形で進められ

ていました．であれば，今年度の問題と昨年度の問題は，生徒の中では「違う構造」と映るのかもしれません．

ちなみに，私は中学時代 $A(x+y)=Ax+By$ から，$(a+b)(x+y)$ の展開を自分で発見して数学に目覚めました．その後，展開や因数分解を「公式」として覚えたことはなく，ただ，「～を～と見る」という考えを積み重ねて問題を解決していきました（もし，公式を暗唱して覚えろとか，公式にあわせて問題を解いていくという指導をされていたら，多分数学の教師にはなっていなかった）．

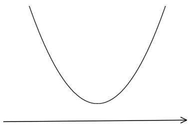
受験学力の実態

「間違いだらけの学習論」（西林克彦）という本に，認知構造と受験学力の「詰め込み」に関して，以下のような記述があります．少し長いのですが引用しいと思います．

大学生を対象にして私が行っている「消えゆく学力ー学力の残存状態から見た学習及び学位周指導の実証的研究」という調査結果が，それに対する一つの解答になるかもしれません．その結論は簡単で，＜わかって＞学習した人の受験勉強は残り，ただ＜詰め込んだ＞だけの人の受験勉強は，無残にも残っていないというものです．

例えば，$x^2+bx+c>0, x^2+bx+c<0$ のそれぞれについて，$D>0, D=0, D<0$ となるように係数を定めてある 6 問からなる二次不等式の課題では，ほとんどの人が，不等号の向き 2 通りと，判別式 3 通りの 6 条件での解の出し方を暗記するという形で学習しており，入試が終わってしばらくした後の成績は，惨憺たるものです．$D<0$ の場合は特に特徴的で，根の公式から虚数解を求めて実数解と同様に $x<\alpha, \beta<x$ や，$\alpha<x<\beta$（α, β は $x^2+bx+c=0$ の根）としたり（虚数解だのに！）$x^2+bx+c=0$ が実数解を持たないからという理由にならない理由で，$x^2+bx+c>0, x^2+bx+c<0$ に解が無いとしたりするのです．要するに，それぞれの条件の時，なぜそのような解法になるのかの必然性を理解しておらず，6 条件を丸覚えしているので，それらの解法の関係が混乱してしまっているのです．

わずか 1 割程度の人が，「$D<0$ のとき，$f(x)=x^2+bx+c$ のグラフは，実根を持たないので x 軸と交わらず，常に x 軸より上にある．



従って，$x^2+bx+c>0$ は，すべての実数 x に関して常に成立する．

また，$x^2+bx+c<0$ は，すべての実数 x に関して成立することはなく，解はない」といったふうに，グラフで 6 通りの条件を捉えて理解したと答えています．この人たちは，入試から時間が経って高学年になっても，ほぼ全問正解です．＜詰め込んだ＞だけの人の調査に対する反応は，大概，「ええと，どうしたんだっけ．受験のときにはできたんだけど，今はわからないし，できません」というものです．受験時だけの「詰め込み」，それを私は「知識の一時預かり」とよんでいます．受験のときだけ，頭の中に知識を預かって，受験が終われば返してしまう．その人の頭の中に残るのは，かつて知識を預かったことがあるという預かり証だけなのです．これが，多くの人の受験学力の実態です．

いずれこの単元は，いつも指導に苦慮するところですね．大変なところを敢えて授業していただき，私もいろいろなことを考えることができました．ありがとうございました．

COFFEE　BREAK 27

新カリ

整数について

新カリの数学Ａに登場する「整数」について、学習指導要領解説ではどのように書かれているのか取り上げてみます。

(2)　整数の性質

整数の性質についての理解を深め，その事象の考察に活用できるようにする．

ア．約数と倍数：素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し，整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること．

イ．ユークリッドの互除法：整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し，それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること．また二元一次方程式の解の意味について理解し，簡単な場合についてその整数解を求めること．

ウ．整数の性質の活用：二進法などの仕組みや分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用すること．

ア．約数と倍数：中学校では，素因数分解や，ある数の倍数を文字を用いた式で表現し処理したり，処理した結果を解釈したりすることを扱っている．今回の改訂により，数を拡張していく過程に関連して扱ってきた「数の集合と規則」も中学校で扱うこととなった．

ここでは，中学校までに扱ってきた整数に関する約数や倍数などの基本的な用語や３の倍数や５の倍数の見分け方などの基本的な事項を振り返ってまとめ，約数や倍数に関する事象を論理的に考察し整数の性質についての理解を深める．例えば，2 数の掛け算が筆算形式で表された虫食い算や覆面算を扱い，楽しみながら整数の性質の理解を深めさせることや，2 つの整数 $a,b(a>b)$ について，$b=aq+r(r=0,1,2,\cdots,a-1)$ という表現や割り算の余りによる分類を利用して整数の性質を考察させることも考えられる．

イ．ユークリッドの互除法：整数の除法の性質に基づいて，ユークリッドの互除法を理解させ，２つの整数の最大公約数を求められるようにする．
指導に当たっては，具体例を通して，その手順の持つ意味を理解させることに重点を置き単なる計算練習に陥らないよう留意することが大切である．

二元一次不定方程式の解の意味について理解し，未知数の係数の最大公約数が１であるような簡単な場合について，その解を求めることができるようにする．解を求めるに当たっては，ユークリッドの互除法を活用し，その方法については具体例を通して理解させるようにする．

ウ．整数の性質の活用：ここでは，整数の性質を利用して，二進数などの仕組みや，分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用できるようにする．

十進法の表記法を見直し，ｎ進法の仕組みを考えさせる．例えば二進法では，簡単な計算を通してその長所や短所を考えさせたり，三進法では，$1/3＝0.1_{(3)}$となることなどを考えさせたりして，数の表記法についての理解を深める．
また，分数を小数で表現すると，有限小数または循環小数になる．有限小数になるのは，分母の素因数が 10 の約数である 2,5 だけからなるときで，そうでないときは，循環小数になる．これらを十進法の表記法や，割り算の余りと「部屋割論法（鳩の巣原理ともいう）」を用いて考察させる．

以上高等学校指導要領解説より