42　数Ⅲにおけるグラフ描画のキモ

単元等　数学Ⅲ　微分法（関数の増減）

◆Contents

・端点でのグラフの出方

・差の式の作図

・高位の無限大

・三角関数の極限

1　授業の内容

(1)　導入　導関数の符号と関数の増減について

(2)　無理関数の増減を調べグラフを描く

(3)　重ね合わせ法でグラフの様子を調べる

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問ありがとうございました．数Ⅲの授業は拝見する機会がこれまで無かったので，私としてもとてもありがたかったです．

9 名の精鋭たちが，非常に熱心に先生の話に耳を傾けて授業に取り組んでおり，その姿勢に感銘を受けました．是非彼らを鍛えてあげて下さい．

また，研究会ではスタッフ 5 人全員に参加していただいて本当にありがとうございました．

これからも，チームワークで学力向上を目指していただきたいと思います．

さて，私は個別訪問で授業を行っていただいた先生に，所感を書いてお届けしております．

内容は，授業の中味に関する教材研究ネタや背景などについての話題を中心としています．そういうわけで，少し述べさせていただきたいと思います．参考にしていただければ幸いです．

グラフは微分の総合力の結集

数Ⅲで扱うグラフは，数Ⅱであつかってきた 3 次関数のように増減を調べればお終いというものではありません．

増減・凹凸だけでなく，定義域・対称性・漸近線・種々の極限・端点でのふるまいなど，それまで学んだ微分の叡智を結集して描いていかなければならないのです．

先生が行った単元では，グラフはまだ先で，教科書では増減表を作るまでになっていたのですが，予告編として，敢えてグラフの概形まで示したのは良かったと思います．

つまり，先生の考え方の中に，微分の単元の大きなゴールとして，グラフをきちんと描けることというビジョンがあったため，そのような流れにされたのではないかと思いました．

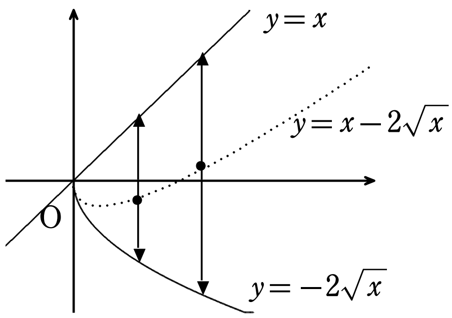
また，増減表を用いずに，基本関数の足し合わせによってグラフが描けるということを示したところに，先生のオリジナリティを感じることができました．この押さえはとても大切なことだと私も思います．

端点などでのグラフの出方

教科書の例題 3 で扱った無理関数

$y = x - 2\sqrt{x}$ のグラフを取り上げてみます．

グラフを足しあわせてみると，下図のように作図できます．



このように考えると，増減表を使わずとも概形を頭に描くことができます．この感覚は大切ですね．

ところが，これだけではわからない微妙な部分があります．それは，原点付近でのグラフの状態と，x が大きくなったときのグラフの様子です．

そこで，導関数や増減表，極限の登場となるわけです．

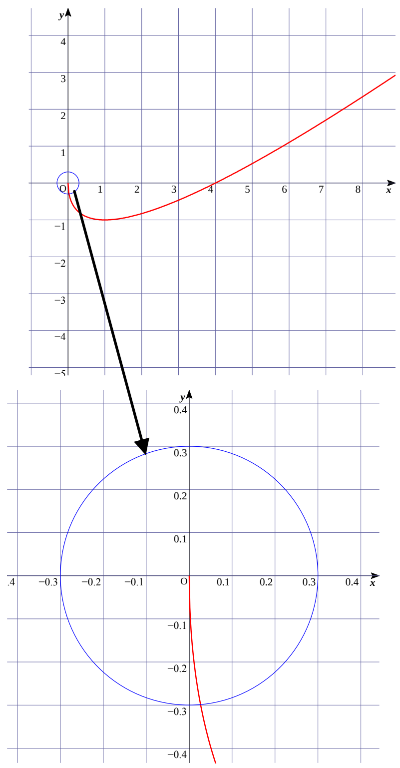
$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-1	↗

ここで

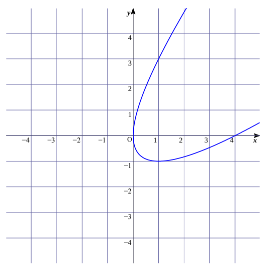
$$\lim_{x\to+0} f'(x)=\lim_{x\to+0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$$

つまり，増減や極値だけでなく，端点でのグラフの出方も導関数からわかるのです．



原点付近を拡大して見みると，確かにグラフは軸に垂直に出ています．

実際， $y=x-2\sqrt{x}$ のグラフは放物線の一部を表します．ここで y 軸がちょうど原点における接線になっています．



分数関数は，微分すると分母に x がくるため軸に垂直な接線の存在に気をつけなければなりません．

次に，極限を調べてみます．授業では確か次のように行ったと思います．

$$\lim_{x\to\infty}(x-2\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\infty\cdot 1=\infty$$

グラフの概観を知るだけなので，この説明で十分だと思いますが，実際は次のように示すところです．

x が十分大きいとき

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)>\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{2}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$$

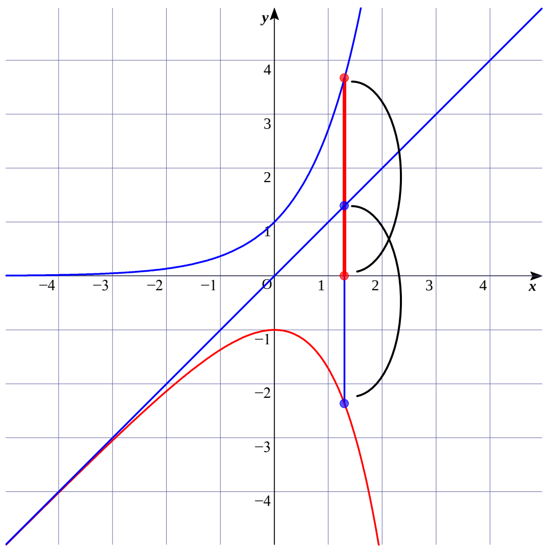
よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\infty$

つまり，より「劣」な関数で押さえて，それの発散を示すわけです．これを巷では「追い出し法」といっています．

差の式の作図

授業で扱ったもう一つの関数

$y=x-e^x$ についても触れておきたいと思います．



今，上図において， $f(x)=x$， $g(x)=e^x$

$h(x)=f(x)-g(x)=x-e^x$ とすると，

$L_1=g(x)$

$L_2=f(x)-h(x)=g(x)=L_1$ なので，L_1 を図示してから，その長さ分だけ L_2 を作れば，簡単に $y=x-e^x$ を図示できると思います．

高位の無限大

$y=x-e^{x}$ のグラフを用いて，極限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}$$

を考えてみようと思います.

次のようにして示すのがわかりやすいと思います.

グラフより　$x-e^{x}<0$　　$\therefore x<e^{x}$ …※
ここで，x を $\frac{x}{2}$ と置き換えても※は
成り立つので，　$\frac{x}{2}<e^{\frac{x}{2}}$
両辺を2乗して　$\frac{x^{2}}{4}<e^{x}$
よって　$x>0$ のとき　$0<\frac{x}{e^{x}}<\frac{4}{x}$
$x\to\infty$ のと $\frac{4}{x}\to 0$　なので
はさみうちの原理より　$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

様々なグラフを描画する際に，この極限は避けて通れませんが，その証明は上で示したようにそれほど簡単ではありません（普通テストなどでは，この極限を自明のものとして使ってよいか，または誘導付きで証明させてから使わせるという形が多い）.

しかし，私はこの極限を暗記したり，ロピタルの定理を，意味もわからず形式的にあてはめて答えを導くより，整関数・指数関数・対数関数の無限のなり方のイメージを持っておくことが必要ではないかと思います.

私の授業では，非常に陳腐でお恥ずかしいのですが，

「対数関数は昆虫の世界，整関数は人間の世界，指数関数は誰もが追いつけない恐竜の世界」

というフレーズを何回も話したり，グラフ描画ソフトでグラフを見せたりしてイメージ化をしています.

そのような中で，

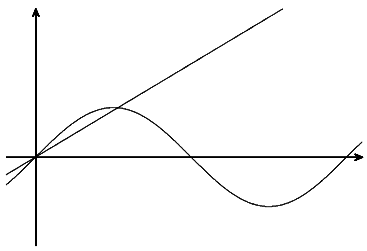
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=\infty$$

などの極限が（証明したり，ロピタルを用いずに）自然にイメージできればいいのではないかと思います.

三角関数の極限

最後に $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の極限にも触れておきます．$y=x$ と $y=\sin x$ のグラフを同じ座標平面に描けというと，次のように描画してしまう人がいます.



これは大間違いで，$y=x$ は $y=\sin x$ の原点における接線になっていなければなりません.

$f(x)=\sin x$　とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=f'(0)$$

つまり，$x=0$ の近傍では，$y=x$ と $y=\sin x$ はほぼ同じふるまいをしていると考えていいというのがこの極限の主張です.

例えば，$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x+x}{3x+\sin 4x}$ だったら

イメージでは $\lim_{x\to 0}\frac{10x+x}{3x+4x}=\frac{11}{7}$ ということです.

同じように有名な極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

も，$x=0$ の近傍では

$e^{x}=1+x$，$\log(1+x)=x$　と考えます.

このように，微分では，1次近似のイメージを生徒に持たせると，数Ⅲとうまくつき合っていけるのではないかと思います.

COFFEE　BREAK 23

受験指南術

数学者で京都大学の名誉教授である森毅氏（2010 年に急逝）の著書「数学受験術指南」（中公新書）に次のような文章がありましたので紹介します.

受験数学の問題にしても，多くの問題を解こうと急ぐのは無駄だと思う．受験校の授業の話を聞くと，たいてい急ぎすぎのように思う．この場合も，1 題に 30 分くらいのペースでよいと思う．これは，「やったことのある問題」が受験本番でも出るかもしれない，という幻想からきている．受験本番では「やったことのない問題」が出るものだ，と居直った方が，受験生度胸として，絶対に有利になる.

それで問題をたくさんこなす，なんてことにあせらなくてよい．それよりは一つの問題についてでも，いろんな角度から，トコトン検討しておく方が，むしろ力がつく.

別のやり方がないか，と考えてみるのもよい．途中でつまずき，やがて正しい方向を見出したときには，その転回点から一般的教訓を汲み取れるかもしれない．解答でどこがポイントだったかを，確認するのも悪くない．一つの問題からだって，いくつものことが学べるものだ.

むしろ，少しの問題を解いただけでも，多くを学び，大きな力をつけることが，受験勉強の技術である．量よりは質だ.

もっと正確にいえば，できるだけ少量の訓練から，できるだけ良質の力を身につけること，これが技術の獲得ということである．量にたよるというのは，「勤勉」という名の知的怠惰にすぎない.

それでも，受験が近くなると，多少は時間を気にするのは当然である．一題に 1 時間以上もかけるようでは，気があせるだろう．まあ，たまには気分転換に，そんなことも悪くないが，ふだんはとても一題に 1 時間以上もかけてられないだろう.

そのとき，とかくあせって，早く正解を手に入れようとしたがるものだ．しかし，正解がわかってから，数学の力がつくわけではない．数学の力のつくのは，正解に達する以前にある．手がかりを求めたり，行き詰って別の道を探したり，それが数学の力であり，受験本番での力でもある．なるたけ，その過程を大事にしないとソンだ．受験勉強のうまいかどうかは，その正解以前の段階を，どう利用しているかにかかる.

そのためには，正解を目標とする以外に，正解に達する以前の過程の，自分を観察するとよい．手がかりの見つけ方，その利用の仕方，行き詰ったときの展開のタイミング．いままでの失敗を総括しての新しい道へのとっかかり，それらは受験参考書に書いてあるものでもないし，参考書から教わるというのも困難なものだ．むしろ，自分の経験から，そうしたコツを身につけるものだ.

COFFEE　BREAK　22　の解答（例）

■	①す	う	②が	く	■
③か	な	■	か	■	④ど
■	⑤ど	れ	■	⑥の	く
⑦か	け	■	⑧お	ど	り
⑨た	い	す	う	■	つ

■	①お	ん	②が	く	■
③ほ	ん	■	く	■	④か
■	⑤ど	こ	■	⑥ひ	く
⑦ま	け	■	⑧か	ざ	り
⑨た	い	ぐ	う	■	つ