# 41　近代的証明法の仕組み

**単元等　数学Ｂ　数列（数学的帰納法）**

◆Contents



## 1　授業の内容

(1)数学的帰納法の説明

(2)不等式及び漸化式の問題

## 2　授業を見ての所感

先日は，大変お忙しい中，授業力向上セミナーでの授業を行っていただきありがとうございました．大人数だったので，プレッシャーを感じたことと思いますが，その中にあって，ポイントを明確にし，生徒一人一人の考えを大切にした先生の授業展開にとても感心いたしました．

研究授業や公開授業では，ややもすると，教えすぎや，授業を破綻なく終えるための，過度な生徒のコントロールが見られがちです．

しかし，先生の授業は，生徒に対するリスペクトがちゃんとあって，その上で，考えを深めたり，発展させたりという導きを提示していたことがとても良かったと思います．

授業全体の雰囲気から，日頃から生徒と良い関係を築かれていることとあらためて思いました．

さて，個別訪問同様，セミナーで授業を実施された先生に対して，授業の感想とともに，教材研究ネタや数学的な背景などについての所感を送付しております．

そこで，今回は数学的帰納法について，いくつかささやかな話題を提供させていただきたいと思います．

### ペアノの公理と数学的帰納法の原理

人類は，その発展の過程の中で数を発見し，数学を作り上げてきました．そして，数学の発展に伴って，数学的「無限」の概念を生み出し扱ってきました．

さて，では無限とは何か．「無限にたくさんある」とはどういうことか．例えば「奇数全体の集合」と「三角形全体の集合」とはどちらも無限に「ある」けれど，その無限に違いはあるのか・・・・

ここでは，無限の概念として，奇数全体の集合や，素数の集合のように小さい順に並べて数えられる集合の個数についての無限を考えます．

このような無限は写像の考えを使って定義されます．つまり，我々が一般的に使う無限数列の項数などの「無限」とは**「自然数の集合と１対１に対応をつけられること」**と定義するわけです．

ならば，自然数の集合はどのように定義されているかが問題になります．

自然数の定義の一つとして「ペアノ公理」と呼ばれるものがあります．これは，宇宙のどんな知的生命体でも有する概念だろうといわれています．

ジョディフォスター主演のコンタクトという映画では，次のような印象深いシーンがあります．

天文学者のエリーはある日，何光年も彼方の星雲（ベガ）から，2,3,5,7,11,･･･と素数回数のノイズをキャッチします．驚いて，マスコミに「これは知的生命体からの信号だ」と発表します．

多くの学者達は「知的生命体ならなぜ，言語ではなくそんな数の羅列を」と否定的コメントを出します．そのときエリーの言うセリフは「英語は高々地球の 70％の公用語だ．しかし，数学は宇宙の公用語（Math is only true universal language.）だ．素数とは１と自分自身としか割り切れない数．だから，この信号には意図がある」というものです．余談が長くなってしまいましたが，ペアノの公理とは次のようなものです．

集合Aに対して

| | |
|---|---|
| Ⅰ | 最小の数「１」が存在する． |
| Ⅱ | Aの任意の要素aに対し，その後続（a＋１）が存在する． |
| Ⅲ | 「１」はAのいかなる要素の後者でもない．（「１」より前の要素は存在しない） |
| Ⅳ | Aの異なる要素は異なる後続を持つ． |
| Ⅴ | 「１」がある性質を満たし，aがある性質を満たせばその後続もその性質を満たすとき，すべてのA内の要素はその性質を満たす． |

以上の５つの条件を満たす集合を「自然数の集合」と定義するわけです．

ここで，Ⅴを，数学的帰納法の原理といいます．

日常的に使われる「帰納法」というと，ある現象について，特定の場面の観測や実験などの経験によって，一般法則を類推することですが，数学的帰納法は「帰納法」という言葉があるけれど，それとは異なり，全ての場合を，もれなくある法則が成り立つことを調べ上げることです．

しかし，無限に続く命題の列$P_1, P_2, P_3, \cdots$があったとき，それらが全て真であることをいうのはどんなに時間があっても無理です．

そこで，まず１番目の命題$P_1$を示した後，**「$k$番目の命題$P_k$が成り立てばネクストも成り立つ」**というシステムを確立すれば，「無限に続くすべての命題が真であることを示したことにしよう！」と高らかに宣言しようというわけなのです．

数学的帰納法の原理（＝「自然数の定義そのもの」）とは，実は人間という知的生命体の根源的な認識であるかもしれません．であるならば，私たちが生徒に教えるときは，証明の書き方やノウハウだけでなく，理念をきちんと考えさせることが必要なのだなあと思うところです．

## ε－δ法との類推

私は，研究会の席上で，ε－δ法との類似性について話しました．そのことについて触れておきたいと思います．

私は，数学的帰納法の証明スタイルを，刑事コロンボ型といっていたのですが，今の生徒（先生も！）はコロンボがわからないので，最近は「古畑任三郎型」といっています．それはどういうことかというと，

「目標とすべき（解決すべき）式」が最初からあって，そうなるように式を作っていくという手法が，最初に殺人犯を提示してから，彼が犯人と証明すべく論理を構築してくところと似ているからです．つまり，どちらも結論ありきの逆追型の論証（推理）というわけです．

また，$n=1$や$n=2$などの具体的値について調べることは，古畑でいうといくつかの状況証拠を見つけただけで決定打にはならないわけですね．

さて，ε－δ法ですが，最近では大学生にも教えていないという驚くべき実態があるそうです（森田先生から東北大でも教えていないと聞いた．本当だろうか）．確かに，この概念は難しいのですが，私は，ε－δ法も数学的帰納法同様，無限に行わなければならない操作を「あるシステムができた」ことによって，その無限回操作を行ったことにしよう！と宣言するところが，似ている考えだと思うのです．それから，結論から予測して推論していくところも数学的帰納法と似ています．

一つ例をあげてみます．

関数$f(x)=2x$が，$x=2$で連続であることを示すにはどうすればよいでしょう．

高校では，$\lim_{x \to 2} f(x)=4$を示すわけですが，

実際には，$x$を２に右側から少しずつ近づけて，

$x=2.1$のとき，$y=4.2$
$x=2.01$のとき，$y=4.02$
$x=2.001$のとき，$y=4.002$
　　　$\cdots\cdots$

今度は左から近づけてみて
$x=1.9$のとき，$y=3.8$
$x=1.99$のとき，$y=3.98$
$x=1.999$のとき，$y=3.998$
　　　$\cdots\cdots$

という具合にしてみて，どうやら$x$を2に限りなく近づけると，$y$は4に限りなく近づいていきそうだから，$\lim_{x\to 2} f(x)=4$としようというわけですね．しかし，この推論は数学的に疑問があります．一体どの時点で「4に限りなく近づく」と宣言するのか．雰囲気で考えるのでしょうか．

だからといって，限りなく2に近い数を入れ続けることはできないし，しかも$x$は実数なので自然数のように「ネクスト」が無いことや，近づけ方も様々あるので，調べることは不可能です．

そこで，次のように考えます．

$x=2.1$，$x=1.9$の場合を見ると，
$x-2=\pm 0.1$に対して，$f(x)-4=\pm 0.2$

同様に，$x=2.01$，$x=1.99$の場合を見て，
$x-2=\pm 0.01$に対して，$f(x)-4=\pm 0.02$

同様にして，
$x-2=\pm 0.001$に対して，$f(x)-4=\pm 0.002$
などとなっていることがわかります．

ここで，一般に，$\varepsilon$が任意の正の数で，それがどんなに小さくても，2からの$x$の距離が，

$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$より小さくさえあれば，$f(x)$と4との差を$\varepsilon$より小さくできると考えることができます．

答案的には次のように考えることになります．

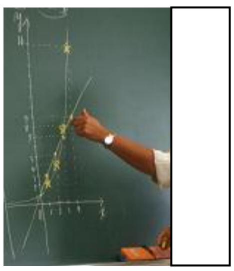
$|f(x)-4|<\varepsilon$　となればいいなあ
　↓
$|2x-4|<\varepsilon$
　↓
$|x-2|<\frac{1}{2}\varepsilon$
やった！ということは，$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$
としてスタートさせればいいんだ

そこで実際の解答は

任意の　$\varepsilon>0$に対して，$\delta$を$\varepsilon$の関数として，$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$ と決める．
$|x-2|<\delta$　なる$x$に対して
$|x-2|<\frac{1}{2}\varepsilon$
$|2x-4|<\varepsilon$
$|f(x)-4|<\varepsilon$
よって，$\lim_{x\to 2} f(x)=4$

つまり，$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$という関係ができたことによって，任意の正の実数に対して自動判定システムが構築されたというわけですね．

## 別解を考える



私が先生の授業の中でとても面白いと思ったのは，$2^n>2n+1$（$n$は3以上の自然数）という問題を解く前に，グラフによって明らかに成り立つことをイメージさせた部分です．（写真）

研究会の中では，賛否を含めていろいろな意見がでましたが，私は，これはとても良かったと思いました．それは，もちろん既習事項を思いださ

せるということもありますが，指数関数の無限大は他の初等関数に比べて高位であることのイメージ付けは，とても大切だと思うからです．理数科の生徒で，今後数Ⅲを学ぶわけですからなおさらです．

それに，実数から自然数，つまり連続的に成り立つことから離散の場合を見るというのも，やはり実数論など解析の本質に迫ることにつながる話だとも思います．逆に，自然数の問題を考えるとき，連続関数を考えていくということは，何も代数曲線や代数的整数論！などの話を持ち出すまでもなく，よく使うことではなかろうかと思います．

例えば$100^{101}$と，$101^{100}$ではどちらが大きいかを調べる場合は，数論で考えるより，

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$の$x>e$における単調性を言えば簡単だし，発展性もありますよね．

（$f(100)>f(101)$から示す）

いずれ，この場面で，生徒たちの顔色が変わって，黒板を注目していたことが，私はとても印象に残っています．