37　空間座標のあれこれ

単元等　数学Ｂ　空間のベクトル

◆Contents

・ベクトル方程式の良さ

・球と平面，球と球の交わり

・円の接線と球の接平面

・空間座標をイメージする工夫

1　授業の内容

(1)球面の方程式の説明

(2)球面の方程式に関する問題演習

2　授業を見ての所感

先日はお忙しい中，個別訪問で授業を見せていただきありがとうございます．先生は，緊張していたとおっしゃっていましたが，とても落ち着いて授業を行っていたという印象を持ちました．

教師がしゃべり過ぎたり，パフォーマンスに走り過ぎると，えてして自己満足の授業に終わることが多いのですが，先生は，きちんと生徒に向き合って，ていねいな誘導と，ポイントを押さえた概念の提示を行っていました．このような中で，授業全体が理知的で締まった雰囲気を醸し出していたように思います．

研究会の雰囲気もとても良くて，学年や年代を越えて，全体で学力向上に努めている姿勢を感じることができました．

また,訪問後に丁寧な fax をいただきましたが,研究会で話題になったことを早速実践されるなど,先生の授業力向上への真摯な姿勢と，誠実さを感じました．

先生はじめ，数学科の先生方の，授業や数学に対する姿勢を拝見して，模試などの成績が好調であるのも，さもありなんと膝を打ちました．

3　補足すること

さて，私は，個別訪問を実施した先生に対して，授業ネタを中心とした情報提供を行っております．

今回は空間座標に関する話題について少し述べたいと思います．少しでも参考になれば幸いです．

ベクトル方程式の良さ

直線の方程式をベクトルを用いて表すと

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$　（A を通り $\vec{u}$ に平行）

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s+t=1$）(2 点 A,B を通る)

などと表現されます．

このベクトル方程式の良さは，平面でも空間でも，つまり次元にかかわらず成り立つ式であるということです．

円のベクトル方程式は

$\left|\overrightarrow{CP}\right|=r$　（中心が C で半径 r ）…※

から出発するわけですが，空間で考えれば球の方程式になるわけです．

つまり，「定点から等距離である点の集合全体」をいわゆる距離が定義されている空間（n 次元ユークリッド空間）における円と考えれば，※も次元に関わらず成り立つ式と考えることができます．

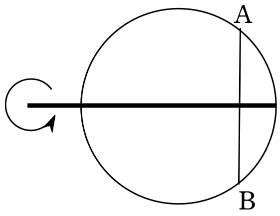
先生の授業では，$CP=r$ を水源地にして，1 次元の場合（２点になる），2 次元の場合(円)，3 次元の場合（球）というように，円のアナロジーから自然に球の方程式を導く形で進められていて，とてもわかりやすい展開でした．

例えば,「空間」といった場合，我々が生活している空間，つまり 3 次元空間をイメージしがちですが，実際は平面も空間に内包されているわけです．ですから，$CP=r$ を満たすものを，距離空間における「球」と定義しておいてもいいのではないかと思います．(つまり，2 次元距離空間における球のことが「円」である)

先生の導入からそんなことを考えておりました．

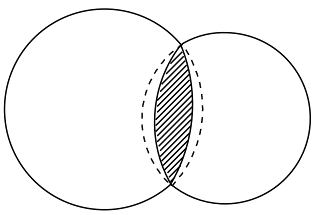
球と平面，球と球の交わり

球は，円を対称軸に関して回転して得られる図形と考えることもできます.



すると，球と平面が交わるときの切り口は，図のように，平面上で円に交わる直線 AB を描き，それを回転させて考えてもよいことがわかります.

２つの球の交わりも円になります.



フラットランドというとても面白い本があります．平面しか認識できない人々が住んでいる国です. フラットランドは一体どこにあるのかを SF 的に空想してみます.

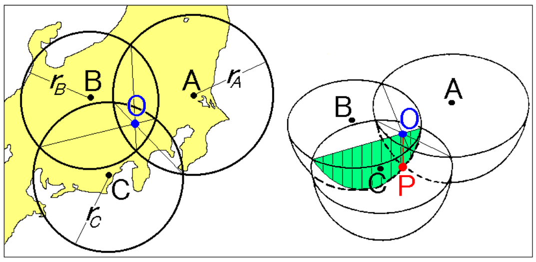
例えば, 我々が住んでいる宇宙空間を「膨らむ球」と考えてみます．そこで，もう一つ別の宇宙が存在していたとすると，２つの膨らむ球の交わりが「広がる円」つまりフラットランドとなると考えられます．余計な話でした.

因みに，フラットランド人は，球とは「時間的に大きさが規則的に変化する円」と捉えるしかありませんね.

さて，では３個の球が交わっている場合はどうなるでしょうか.

２個の球で作られる平面が３つ交わっている形なので, 3 個の球は１点で交わっていることがわかります.「３つの平面はただ１つの点を決定する」というのは空間における結合公理の１つです.

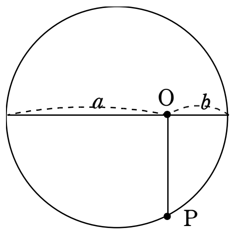
３個の球が１点で交わる性質は，GPS 機能や，地震の震源地を求める手法に活かされています.



地震の震源地について少し触れたいと思います.

まず，P 波と S 波の到達時間から震源までの距離が測定できます（雷がピカッとなってからゴロゴロが来るまでの時間を調べるのと同じ原理)．すると，震源地は，空中には震源地はないので，観測値を中心とする半球上にあることがわかります.これを３か所で行えば，その３球の交わりが震源地（上図右の P 地点）とわかります.

３つの球を平面で切ったとき，上図左のようになっていますが，３つの円の共通弦はただ１点で交わります（方べきの定理で証明できる)．この共有点を震央と呼びます．震源の深さ OP は，三平方の定理か方べきの定理で求めることができます.



$$OP^2 = ab$$

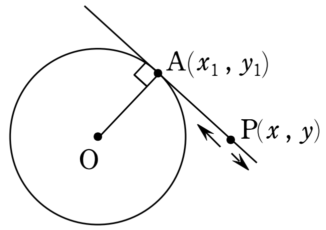
（現在は加速度の考えから１観測地点から震源までの距離を出すらしい）

今，本県で実施している基礎力確認調査のアンケートを見ると，「数学は役に立つ」と回答している生徒が非常に少ない状況があります（国語，英語に次いで３番目).

例えば，地震の震源地を求める際にも，こんなに数学が使われているということ，つまり数学の有用性について私たちは様々な機会を捉えて示すことも必要ではないかと思います.

円の接線と球の接平面

原点中心半径 r の円の周上の点における接線の方程式は次のようになります.



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$　より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

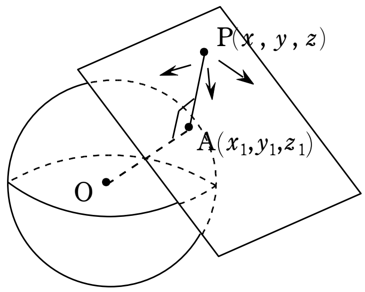
$(x_1,y_1)\cdot(x-x_1,y-y_1)=0$

$x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$

$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$ なので

$x_1x+y_1y=r^2$　答

では，原点中心半径 r の球面上の点における接平面の方程式を考えてみましょう.



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$　より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=0$

$x_1x+y_1y+z_1z=x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2$

$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=r^2$ なので

$x_1x+y_1y+z_1z=r^2$　答

球の方程式を $x^2+y^2+z^2=14$ とします.
今，球面に住んでいる人（球から見て非常に小さいと考える）が A 地点 $A(1,2,3)$ にいるとします.
すると，A における接平面の方程式は,

$x+2y+3z=14$　$\cdots$※　となります.

このとき, 例えば $(0,0,5)$ という地点に人工衛星があったとき, A 地点からそれは見えるでしょうか.

※式の左辺に $(0,0,5)$ を代入してみると

$0+2\cdot0+3\cdot5=15>14$

つまり, $(0,0,5)$ は平面の上側にある点であることがわかります．ということは，A 地点から「見える」ことがわかりました.

余談ですが，私は昨年まで 2 年間八戸市内の高校に勤務していて，素人ながらバレーボール部の顧問を務めておりました.

生徒から教わったのですが，バレーでは，アンダーハンドレシーブを行う際，ボールが当たる両手首の部分に下敷きなどを使って「面をつくる」ことを意識するらしいのです．つまり，ボールが向かってくるベクトルに対し，接平面を考えるということになるのだなあと感心したことがあります.

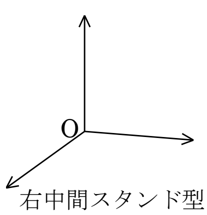
空間座標をイメージする工夫

空間の問題を考える際, 2 次元上に 3 次元を表現しなければならないので，無理が生じ，イメージ化がとても難しくなります.

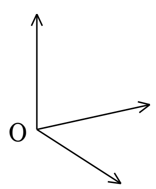
そこで，いくつかの工夫を考えてみたいと思います.

(1)　鳥瞰図・三面図

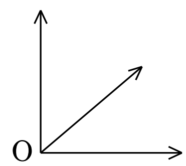
空間座標は，図の「右中間スタンド型」で表現されることが多いのですが，場面によっては，一塁側スタンド型や，バックネット裏型などを使うのもいいかもしれません.



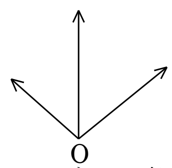
右中間スタンド型



ライトファール席型

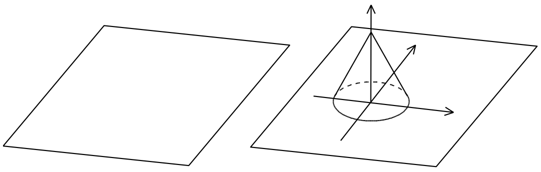


一塁側スタンド型



バックネット裏型

私がよく使うのは，鳥瞰図型です．まず，最初に，下図左のように土台となる xy 平面を描きます．そして，その上に下図右のように図を構築していくようにすればイメージしやすいのではないかと思います．



三面図については，1994 年の東大の問題で説明します．

> xyz 空間において条件
> $x^2+y^2 \leqq z^2$，$z^2 \leqq x$，$0 \leqq z \leqq 1$　を満たす点$P(x, y, z)$の全体からなる立体を考える．この立体の体積をVとし $0 \leqq k \leqq 1$ に対し，z 軸と直交する平面$z=k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする．
> (1)　$k=\cos\theta$ とおくとき，$S(k)$ をθで表せ．
> 　ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．
> (2)　Vの値を求めよ．

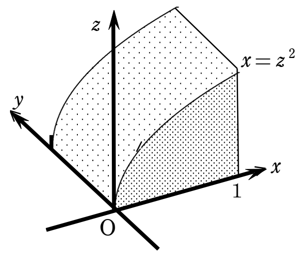
まず，$x^2+y^2 \leq z^2$　（$0 \leq z \leq 1$）の図形が何であるかがポイントですね．

$z=0$　のとき　$x^2+y^2=0$

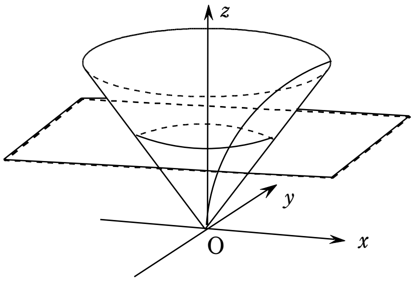
$z=\dfrac{1}{2}$　のとき　$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

$z=1$　のとき　$x^2+y^2=1$　などということから，円錐（を逆さにしたもの）と考えることができます．一般に，空間において，$x^2+y^2=r^2$ が直円柱であることがわかっていれば，円錐もイメージできるのではないかと思います．

次に，$z^2 \leq x$（$0 \leq z \leq 1$）は，$x=z^2$ という 2 次関数を考えて，更に y は任意なので「放物柱」ともいうべき図形であることがわかります．

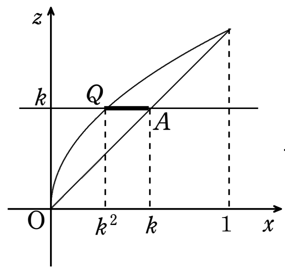


とりあえず「鳥瞰図」で描いてみましょう．

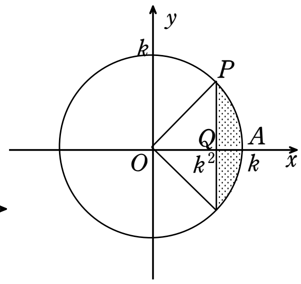


これでは共通部分がどんな図形かイメージできません．そこで三面図を用います．

＜正面図＞



＜上面図＞



（側面図は省略）

ここで，$OP=k, OQ=k^2$ なので，

∠POQ＝θ　であることがわかります．これで面積関数が求まります．

$$S(k)=\frac{1}{2}k^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}k^2\sin 2\theta$$

$$\therefore S(k)=\theta\cos^2\theta-\sin\theta\cos^2\theta$$

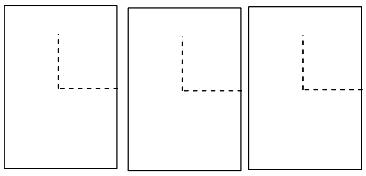
あとはこれを定積分すればよい，つまり，イメージを離れ，計算の世界にバトンタッチできたということですね（以下の計算は略）．

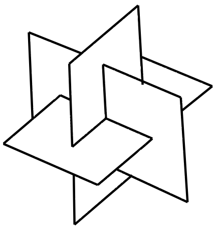
東大の問題は空間図形をイメージ化させる問題がとても多いと思います．頭の中に空間図形が思い浮かんで自在に動かしたり，切断したりできる人ならばいいのですが（実際そういう人もいる！），一般人はそんなことはできないので，このような三面図などで分解して考えることでイメージ作りをするのが一つの方法ではないかと思います．ですから，例えば$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ などという球も一度，三面図上ではどうなるかを図示して見るのもよいのかもしれません．

(2)　名刺で空間座標

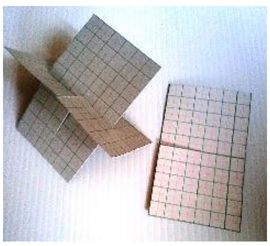
最後に，空間座標のモデルを作って視覚化することも，よい数学的活動ではないかと思いますので，紹介したいと思います．

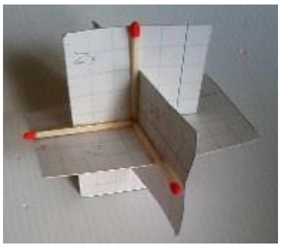
図のような 3 枚の紙に L 字型の切れ目を入れ，それを組み合わせて空間座標を作ります．





（工作用紙 6 cm×10cm が手頃）



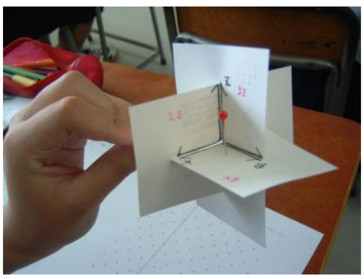


手順１：2 枚の長方形を上写真左のように結合

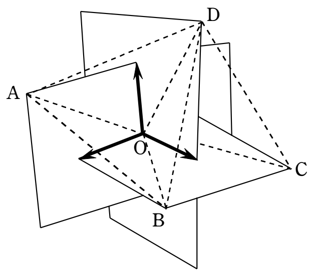
手順２：残ったもう 1 枚の長方形を，切れ目の具合を考慮して，3つの平面が 1 点で交わるように組み込む．（ここが難しいが面白いところ）

手順３：それぞれ２つの平面が作る直線をマッチの軸で x 軸，y 軸，z 軸と印をつける．

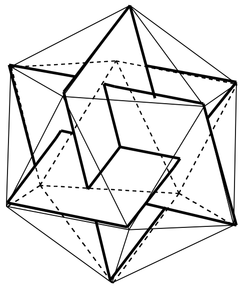
出来上がった座標空間を見ると，８つの象限に分かれていることがわかります．

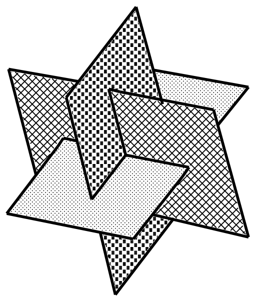


写真のように，待針を使って，点の座標を取り，xy 平面，yz 平面，zx 平面の対称な点の座標を考えさせたりするとよいイメージづくりになると思います．

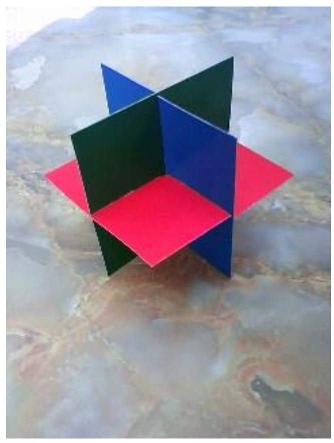


長方形の縦横の比が，名刺のように黄金比（１ ： $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ）になっているとき，AB=BC となり，△ABD も△BCD も正三角形になります．すると，長方形の頂点を結んでできる立体が正 20 面体になります．





名刺で作る空間座標の話を，前任校の八戸西高でしたら，講師の I 先生という方が，とても感動してくれて，更に工夫して，工作用紙にうまく切れ目を入れたものを作ってくれました．
（何と！クラス全員分を工作用紙で作って授業を行った）紹介いたします．



COFFEE　BREAK 20

数学と音楽

宇多田ヒカルがホームページ上で，自分が作詞する時のスタンスを，数学を引き合いに出しながら述べているものがありました．

> 「歌う，ってことは，言葉の意味を表現するのはもちろん，言葉が言葉でないくらい一音一音を解体していく作業でもあります．＜中略＞歌詞が完成するまでパズルみたいに考えるのさ！＜中略＞これを制約と思う人もいるかもしれないけど，工夫が必要というのは創造するうえですごくよい刺激だよ．作詞も作曲も，歌うことも，想像力や感情が大事なのはもちろん，科学的思考が肝心だと思います！とくに音楽と数学って密接な関係があるんじゃないかな．ここ数年アメリカで，費用削減の対策として音楽の授業をやめる学校が増えちゃったの．で，それはいかん！音楽を救え！という運動にテレビの音楽専門チャンネルの VH 1 も参加しているんだ．幼い頃から楽器を習ったり音楽を勉強している子のほうが数学や他の勉強の成績も高いっていうデータもあるらしいんです．それすごく納得！数学の方程式を解いていて「くそーなんじゃこりゃ一難しい！けど面白い！絶対解いてやる！」って感じたときの脳のピリピリ感，作詞しているときも感じるもん．ほら，私がこよなく愛する Sting は数学の先生の肩書きか資格？を持っているし，B's の稲葉さんも確かそうだよね？『こんなの学校以外で使わないじゃーん』とかぬかして数学をないがしろにする子はもったいないことをしていると思うなあ．好きな子を口説くとき，ラブレターを書くとき，はたまたロックンローラーかシンガーソングライターを志した時に，その脳の部分が働くかもしいれないのにっっ！」

数学と音楽といえばこれはもう切っても切れない縁があって，古代から数学者は音楽の研究者でもありました．ピタゴラスは数学的な手法によって「ピタゴラス音階」を作り，これが現在の音階の基礎になっています．また，ケプラーやオイラーなど多くの数学者・物理学者が現在の平均率とは異なる音階を作っています．

モーツアルト作曲「k516 番ハ長調」の前半部分（モーツアルトの作ではないという説もある）は「サイコロの音階」などとも呼ばれていて，各小節にアルファベットが割り振られていて，ある英文の並びに従って小節を並べ替えることで何とおりもの音楽ができる仕掛けになっています．このような「音楽のアナグラム」は 16 世紀にずいぶん流行ったようですが，そのきっかけを作ったのはフランスの数学者メルセンヌといわれています．このメルセンヌは数学者であるとともに，音楽理論の研究家でした．過去の音楽理論を研究し数学的に理論づけた最初の人ともいわれています．彼は，振動する弦が同時に数個の音を発する理由を考えたり，弦の長さと振動数，張力の関係式 $2lf = \dfrac{\sqrt{p}}{m}$ を求めたりしています．彼が 1636 年に出した「普遍的調和：音楽の理論と実際を含む」には皆さんが組み合わせで使っている階乗計算も登場していて，1 オクターブの８音を並べ替えてできる全ての音階（8!＝40320 通り）が記述されたりしています．

よく「数学なんか人生の役に立たない」という人がいます．「そんなことに熱中して何の意味があるの」「世界が平和になるわけじゃないし」までいったりする人もいます．それはある意味その通りかもしれません．でも，それって凄い誉め言葉かも．そんな自由で役に立たないくらい面白い数学だからこそ，音楽を発展させたりすることができるんだなとも思うのです．