34　釣り合いで考える分点の位置ベクトル

単元等　数学B　ベクトル（ベクトル方程式）

◆Contents

・三角形の質点重心

・錘で分点の位置をみつける

・空間の問題も錘で考える

1　授業の内容

(1)導入（ベクトルの基本公式の確認）

(2)平面ベクトルに関する問題演習

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問におじゃまして，授業を見せていただきありがとうございます.

先生の明るく爽やかな語り口による丁寧な説明がとても印象的でした．大教室での授業でしたが，注意が散漫にならないように，巧みな話術で生徒を注目させるとともに，スライド型黒板もうまく使い，分かりやすい説明に努めていたことがわかりました.

また，受験指導の多忙な中であったにもかかわらず，指導展開だけでなく，教材観，生徒観なども記した丁寧な指導案を作ってくださりありがとうございました．ご苦労をおかけしました.

2　補足すること

私は，個別訪問を行った先生に対して，授業に対する感想とともに，教材研究ネタなどをお話させていただいております.

今回の授業では，学習課題として

文中の式・キーワードから解法を推測できるようになる

とあげておられましたが，実際には**「三角形ABCの内部に点Pがある場合のベクトル方程式の理解」**が本時のゴールだったのではないかと思います.

そこで，今回は

$k\overrightarrow{PA}+l\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC}=\vec{O}$　型のベクトル方程式について，その意味などについて簡単に触れておきたいと思います.

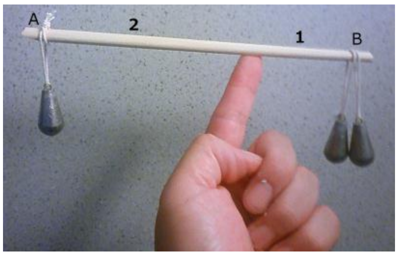
三角形の質点重心

三角形の頂点に錘が分布している場合の釣り合いの位置を次のような順で考えてみましょう.

まず，写真のように線分の両端に錘が1個ずつ分布している場合を考えます.

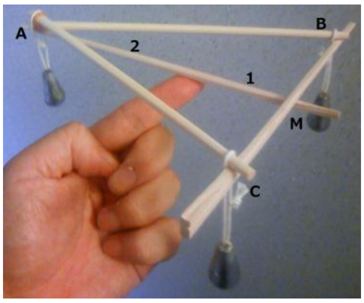
当然釣合の点は，線分ABの中点ですね.

次に，Aに1個，Bに2個の錘が分布している場合はどうでしょう.



釣り合いの点は，ABを2：1の比に内分する地点であることがわかります.

では，これらの考えから，三角形の重心の位置を突き止めましょう.



三角形の各頂点に錘を1個ずつぶら下げます.

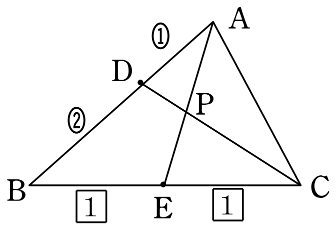
写真において，まずＢとＣに錘が１個ずつぶら下がっているので，その中点ＭとＡを結んだ線分上のどこかにあることがわかります．

そこで，線分 AM を見ると，Ａには１個，Ｂ地点には２個分の錘がかかっていることがわかります．

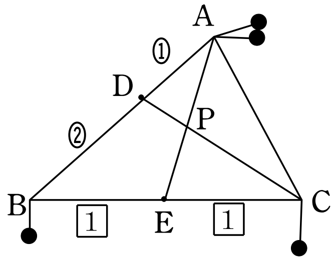
従って，釣り合いの点（重心）は，AB を２：１の比に内分する地点であることがわかります．

この考え方から，よく出てくる交点の位置ベクトルの問題は次のように考えることができます．

例　図においてABを１：２の比に内分する点をD，BCの中点をE，AEとCDの交点をPとする．AP : PE，CP : PDの比を求めよ．



参考　次のように錘をぶら下げる．

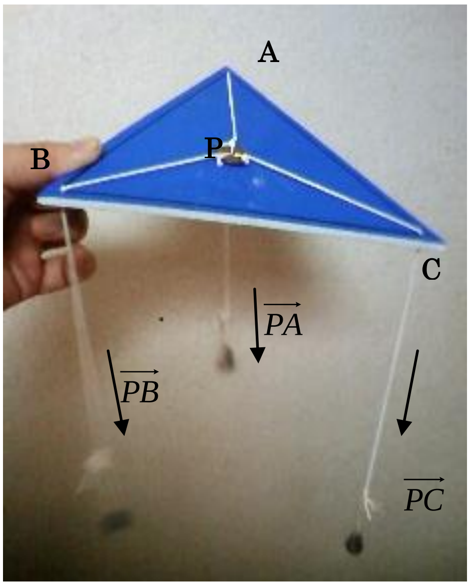


この図から
AP : PE＝１：１
CD:PD＝３：１　がすぐ見える．

さて，先生の授業を拝見した後，写真のような教具を作ってみました．５円玉によく伸びるゴム紐を結び，各頂点に穴を開け，ゴム紐を通し，その先端に錘を１個ずつぶら下げます．

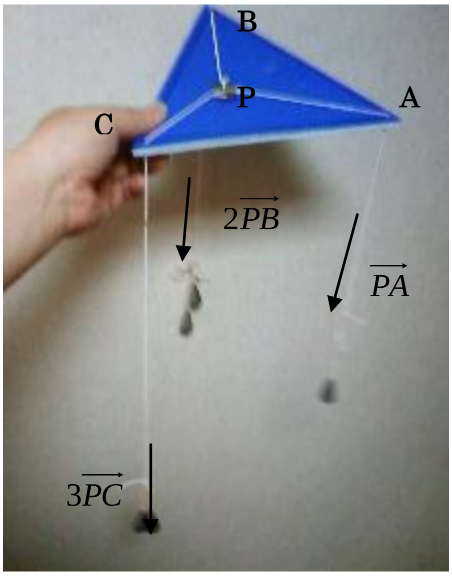
すると５円玉はある点で安定します．つまり A，B,Cから引っ張られる力の釣り合いの点がＰです．

これが $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{O}$ の意味です．

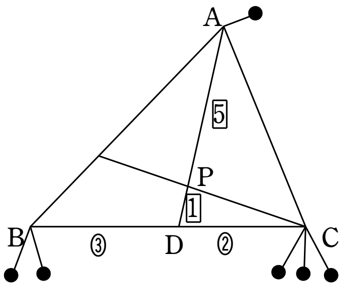


さて，では $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{O}$
という方程式を考えてみましょう．

この場合は，Ｂ地点は２倍，Ｃ地点には３倍の力がかかっていると考えることができます．すると，写真のようにＡに１個，Ｂに２個Ｃに３個の錘をぶらさげたときの釣り合いの点がＰというわけです．



この考えから，P の位置は下図のとおりになることが直ちに実感できます．



実際の解答は，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{O}$

において，A を始点に統一し，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

をベース（基底という）に式を

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}$ と表示し直し

更に，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$ ※

とすれば，$BD:DC=3:2$，$AP:PD=5:1$

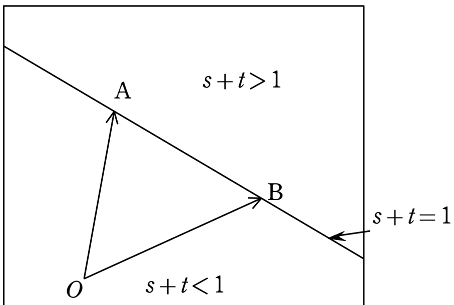
がわかる．

※の式は

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{A(BCを3:2に内分する点)}$

というイメージです．

【ポイント】



平面上の任意のPは，一次独立な基底

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ によって

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とただ一通りに表される．

ここで，$s+t=1$ となるところを基準として

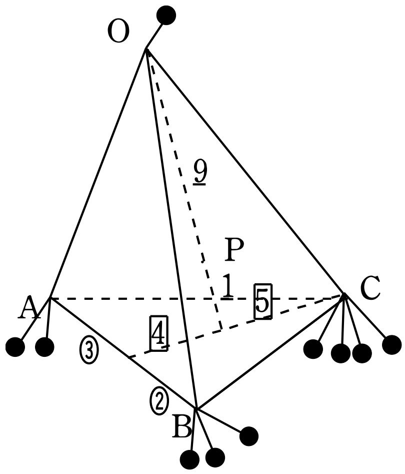
表示し直すと点 P の位置が見えてくる．

空間の場合

四面体 OABC とその内部の点 P に対して，

$$\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{O}$$

が成り立つとき，P はどんな位置にあるかを最後に考えてみたいと思います．



錘分布を考えれば，一発で P の位置がわかります．

$\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{O}$

において，始点をOに統一し，

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を基底にして式を

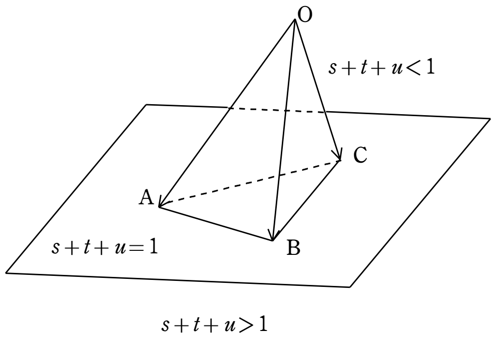
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}}{10}$ と直し

更に $\overrightarrow{OP}=\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{5\cdot\dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}+4\overrightarrow{OC}}{9}$

とすれば，３つの辺の比

３：２，４：５，９：１　が分かる形になります

【ポイント】



空間の任意の点Pは，一次独立な基底

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ によって

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$

とただ一通りに表される．

ここで，$s+t+u=1$ となるところを基準として

表示し直すと点Pの位置が見えてくる．

COFFEE　BREAK 19

高校生クイズの問題②

●　もう少し遊んでみる

18で述べた問題では，自然対数の底 e が出現するのが興味深い．さて、今度は次のような問題を考えてみよう．

> サイコロを 6 回振る．何回目かに，その回数と同じ目が出る確率を求めよ．

つまり，1回目に1が出るとか，2回目に2の目が出るなどという確率である．

これは余事象を考えると良い．つまり，すべての回数においてその回数と同じ目が出ない事象を考える．

第k回目（$1\leqq k\leqq 6$）にk以外の目が出ればいいので，その確率は$\dfrac{5}{6}$．つまり余事象の確率は$\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$である．

よって，求める確率を P とすると，$P=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$　答

ところで，この解答は次のように考えることもできる．

全事象は 6^6

1回以上一致する事象の場合の数　${}_6C_1 6^5$

（2回以上一致する場合の重複あり）

2回以上一致する事象の場合の数　${}_6C_2 6^4$

（3回以上一致する場合の重複あり）

3回以上一致する事象の場合の数　${}_6C_3 6^3$

（4回以上一致する場合の重複あり）

4回以上一致する事象の場合の数　${}_6C_4 6^2$

（5回以上一致する場合の重複あり）

5回以上一致する事象の場合の数　${}_6C_5 6$

（6回一致する場合の重複あり）

6回全部一致する事象の場合の数　${}_6C_6$

以上から「引きすぎ足しすぎ論法」（注命名下町）によって求める確率を P とすると

$$1-P=\frac{1}{6^6}(6^6-{}_6C_1 6^5+{}_6C_2 6^4-{}_6C_3 6^3+{}_6C_4 6^2-{}_6C_5 6+{}_6C_6)$$

$$=1-{}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)+{}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2-{}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4-{}_6C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{6}\right)^6$$

$$=\left(1-\frac{1}{6}\right)^6=\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

よって，$P=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$　答

●　またまた拡張

n に拡張してみよう．

> 1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードある．このカードから1枚抜き取り，それに書かれている数字を記録し，そのカードをもとに戻す．
> このような操作を n 回行うとき，操作回数と同じ番号が現れる確率を求めよ．

余事象ではなく，敢えて先ほど述べた「引きすぎ足しすぎ論法」によって考えてみる．

確率を P とすると

$$1-P=\frac{1}{n^n}(n^n-{}_nC_1 n^{n-1}+{}_nC_2 n^{n-2}-{}_nC_3 n^{n-3}+\cdots+(-1)^n{}_nC_n)$$

$$=1-{}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2-{}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$　よって，$P=1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$　答

さて，ここで、$n\to\infty$としてみよう．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right\}^{-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}^{-1}=(e\cdot 1)^{-1}=\frac{1}{e}$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}P=1-\frac{1}{e}$　なんとここでも e が登場する．

【オマケ】　今は「カードを元に戻す」という条件で考えたが「カードを元に戻さない」場合はどうなるか考えてみよう．ここでは余事象の考えは使えない．

$$1-P=\frac{1}{n!}(n!-{}_nC_1(n-1)!+{}_nC_2(n-2)!-{}_nC_3(n-3)!+\cdots+(-1)^n{}_nC_n)$$

$$=1-{}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_nC_2\frac{1}{n(n-1)}-{}_nC_3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

ここで$n\to\infty$としてみよう．

e^x のマクローリン展開が，$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ であることに注意すれば，$x=-1$ とすれば，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ となるので，やはり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P=1-\frac{1}{e}$ となる．

ただし，こちらの場合，e への収束は格段に早いことに注意しておく．