30　接線の方程式７つの解法

単元等　数学Ⅱ　接線の方程式

◆Contents

・1 次近似と接線

・差の関数と接線

・放物線と 2 接線の性質

・べき展開

1　授業の内容

(1)　接線の方程式の公式を導く

(2)　接線の方程式を求める演習

2　授業を見ての所感

先日は，個別訪問で授業を行っていただきありがとうございます.

先生の授業を参観して感心したところは，

◆　教科書の説明に入る前に，図形（見てわかるイメージ）から，式（解析できる世界）の相互の関係について高い視点から，数学的な見方を示したこと.

◆　「～における接線」と「～から引いた接線」など，誤り易い部分をきちんとフォローしながら進めていたこと.

◆　優しく生徒に語りかけるような丁寧な説明と，机間巡視を積極的に行い，個への対応を心がけていたこと.

◆　授業後の研究会で，意欲的に発言してくれたこと．などです.

ただ，先生は，接線の方程式を，教科書にある $y-f(a)=f'(a)(x-a)$　ではなく，敢えて $y=f'(a)x-af'(a)+f(a)$ と変形して教えていたのは，先生の，図形的意味を重視するという教材観に基づいてのものだと思いますが，これについては，以下の 4 点から違和感を覚えます.

①　公式として覚えにくく運用しがたい.

②　教科書にない形なので，生徒がとまどう.

③　既習事項（点 (x_1,x_2) を通り，傾き m の直線の方程式）とのつながりがない.

④　むしろ教科書にある形の方が，図形的意味を持つ.（$y=f'(a)x-af'(a)+f(a)$ は $f(0)$ をベースにしているが，接線の方程式は，接点の近傍の変化量の関係 $dy=f'(x)dx$ を，局所差分化した形で $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ と考える方が通りが良い．または，もっと単純に，x の増分と y の増分が比例していると考えた方が自然である）

3　補足すること

私は，授業の内容に関連した，教材研究ネタや，数学的話題を，授業者の先生に配信していました．これは，最終的に，県内の先生方の教材研究集を作成することを目的としています.

今回は，接線の方程式を求める様々なアプローチについて述べたいと思います.

【サンプル問題】

放物線　$y=x^2-4x$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ.

【解１】接線方程式の公式利用

$f'(x)=2x-4$ より，$f'(1)=-2$ …（接線の傾き）
また $f(1)=1-4=-3$ より　接点の座標は $(1,-3)$
よって求める接線の方程式は
$y-(-3)=-2(x-1)$
$\therefore y=-2x-1$ 答

【解２】判別式の利用

求める接線は明らかに x 軸に垂直ではないので
$y+3=m(x-1)$　とおける.　※
これと，$y=x^2-4x$ を連立させると
$x^2-(4+m)x+m-3=0$　※※
※※が重解を持てばよいので，$D=0$
$(4+m)^2-4m+12=0$
$m^2+4m+4=0$
$(m+2)^2=0$　よって $m=-2$
求める接線の方程式は※より
$y=-2x-1$ 答

参考

放物線と直線の位置関係は，D（判別式）を利用すれば，微分を使わず，代数方程式を解くことで接線の方程式を導いていくことができる.

【解３】1次近似Ⅰ

組み立て除法により，$y=x^2-4x$ の右辺を $x-1$ で表す.

1	1	-4	0
		1	-3
	1	-3	-3
		1	
	1	-2	

$y=(x-1)^2-2(x-1)-3$

ここで，2次の項を０とみて，$x=1$ の近くでの y の1次近似を求めると.

$y=-2(x-1)-3$

$\therefore y=-2x-1$ 答

参考 1

ポイントの一つは，y を $x-1$ でまとめ直す部分である．これは $x=1$ のまわりでのベキ展開であり，将来，テーラー展開に繋がるという重要な意味を持つ.

また，組み立て除法の繰り返しで簡単にまとめることができるのも覚えておきたい手法である.

例　$z^4=a(z-1)^4+b(z-1)^3+c(z-1)^2+d(z-1)+e$ が恒等式のとき a , b , c , d , e を決定せよ

解答

1	1	0	0	0	0
		1	1	1	1
	1	1	1	1	1
		1	2	3	
	1	2	3	4	
		1	3		
	1	3	6		
		1			
	1	4			

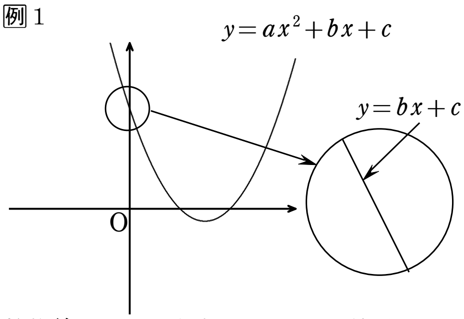
$z^4=(z-1)^4+4(z-1)^3+6(z-1)^2$
$+4(z-1)+1$

より $a=1$, $b=4$, $c=6$, $d=4$, $e=1$

参考 2

$x=1$ の近傍での一次近似は，2次の項 $(x-1)^2$ を落とす（０と見る）ことで得られる．厳密性には欠けるが，微分を指導する上でこのようなイメージを持つことは大切である.

例 1



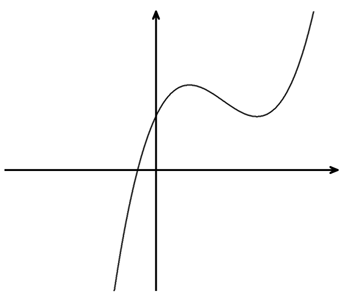
放物線が図のようなとき， b の符号を求めよ.

解答　$x=0$ における接線の方程式は

$y=bx+c$　であり，直線の傾きより

$b<0$ 答

例 2



３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が図のようなとき，a , b ,c , d の符号を求めよ.

解答

グラフの形から $a>0$　切片から $d>0$

y を $x=0$ の近くで2次近似すると

$y=bx^2+cx+d$

グラフの形状から上に凸なので $b<0$

y を $x=0$ の近くで１次近似すると

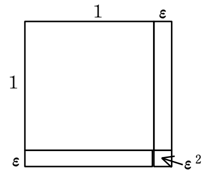
$y=cx+d$

傾きから　$c>0$

【解４】1次近似Ⅱ

$x=1+\varepsilon$ とおく．
$y=(1+\varepsilon)^2-4(1+\varepsilon)$
$y=-3-2\varepsilon+\varepsilon^2$
ここで，$\varepsilon\to0$ のとき，
ε^2 の項を落として　$y=-3-2\varepsilon$
$y=-3-2(x-1)$　　$y=-2x-1$ 答

参考



図において，$\varepsilon\to0$ のとき
ε^2は急速に０に近づくことがわかる．
微小部分をεとおいて，2次の項を落としながら
精度の良い近似計算を行うことができる．
ニュートンは以下のような手法を用いて，近似
計算を行った．

【$\sqrt{5}$ を求める】
$x^2=5$　　である………※
$x=2$ とすると足りない　$x=3$とすると大きい
$x=2.2$ とすると，$x^2=4.84$ でおしい！
そこで，$x=2.2+\varepsilon$ とする．（ε は0.1よりも小さい）
これを※に代入すると　$4.84+4.4\varepsilon+\varepsilon^2=5$
$4.4\varepsilon+\varepsilon^2=0.16$　………※※
ここで大胆なことをする．
ε は０に近い数なので，ε^2 はもっともっと０に
近いはずだ．そこで思い切って$\varepsilon^2=0$ としてみる．
すると※※より　$\varepsilon=\dfrac{0.16}{4.4}=0.03636\cdots$
つまり，$x=2.2+0.03636\cdots=2.23636\cdots$ とできた．
そこで今度はあらためて
$x=2.236+\varepsilon$　とおく（εは0.001より小さい）
これを先ほどと同じように※に代入すると．
$2.236^2+4.472\varepsilon+\varepsilon^2=5$
ここでε^2 はもっともっともっともっと０に近いはずなので
$\varepsilon^2=0$ として解くと，$\varepsilon=0.0000679785\cdots$
よって，$x=2.2360679785\cdots$　となる．
このような操作を続けていけば相当いい近似が得られ，
誤差の範囲もわかる．

【解５】差の関数

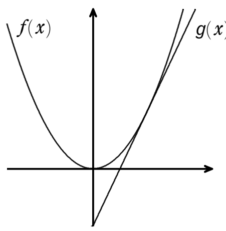
求める接線の方程式は
　$y=x^2-4x-(x-1)^2$
　$y=-2x-1$　答

参考

差の式の意味が理解できていれば，
これが最も早い方法であろう．
例えば，
$y=2x^2-3x+1$ の$x=2$ における接線の
方程式であれば
$y=2x^2-3x+1-2(x-2)^2$ とすればよいし
$y=-3x^2+x-3$の$x=1$ における接線の
方程式であれば
$y=-3x^2+x-3+3(x-1)^2$　でよい．
つまり，2次関数$y=ax^2+bx+c$ の
$x=\alpha$ における接線の方程式は
$y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$　である．

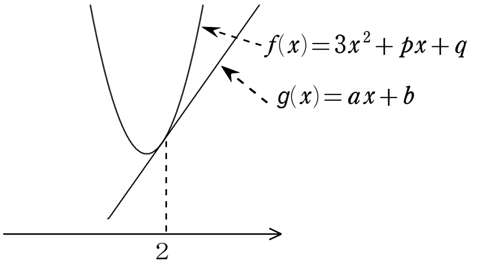
この考え方を生徒が理解すると，定積分
の定着が飛躍的に進歩すると思われる．
以下に，教師と生徒の会話による説明を示す．

T：$f(x)=x^2$ と $g(x)=2x-1$の交点の座標を
求めてごらん．



S：$f(x)=g(x)$　とします．
ここで，$g(x)$ を左辺に移行して
$x^2-2x+1=0$
T：待った！
$g(x)$ を左辺に移行すると，
$f(x)-g(x)=0$　となるよね．
この式の左辺は，$f(x)$と$g(x)$ の差の関数
であることに注意して下さい．
S：では，続きをやります．
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$ なので $x=1$ （重解）
重解なので，交点（接点）は$(1,1)$です．

T：では次の問題



図のようなとき，$f(x)-g(x)$ を求めなさい．

S：$f(x)$ も $g(x)$ も不明なので，$f(x)-g(x)$ は求められません．

T：何いってるんだい．さっきの問題を思い出してごらん．

S：$x=2$ で接しているところを鍵にすればいいのか．つまり，$f(x)=g(x)$ を解くと $x=2$ の重解が出る．そうか！

$f(x)-g(x)=0$ は　$(x-2)^2=0$ とできるんだわかりました．

$f(x)-g(x)=(x-2)^2$ ですね．

T：残念！　$f(x)$ の x^2 の係数を見てごらん．

S：３ですね．

T：そう．だから，

$f(x)-g(x)=3x^2+(p-a)x+q-b$

という形にならなければいけない．

S：なるほど．この両方を満たす形は

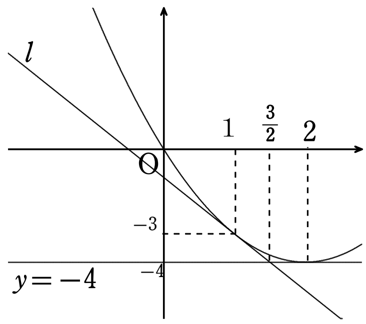
$f(x)-g(x)=3(x-2)^2$ ですね．

T：その通り．ここで，$g(x)$ は $x=2$ における $y=f(x)$ の接線の方程式ですね．

そこで，$g(x)=f(x)-3(x-2)^2$ と書くこともできます．これで接線の方程式を導く式を手に入れました．

【解６】放物線と２接線の性質の利用

$y=(x-2)^2-4$

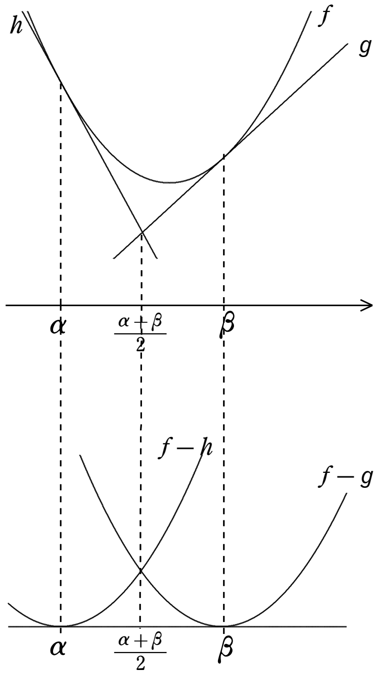


２つの接線 l と $y=-4$ の交点の x 座標は，２つの接点の x 座標の中点である．よって，l は $(1,-3)$，$\left(\frac{3}{2},-4\right)$ を通る．

$\therefore\ y+3=\dfrac{-1}{\frac{1}{2}}(x-1)$　　$y=-2x-1$ 答

参考

2次関数と2つの接線について
２つの接線の交点の x 座標は
２つの接点の x 座標の中点である．



$f(x)=ax^2+bx+c$ として，差の式を考えると　$f-g=a(x-\beta)^2$
$f-h=a(x-\alpha)^2$　となるので
２つの接線の交点は，接点の x 座標の中点であることがわかる．

【解７】ダイレクトな一次近似

$y=x^2-4x$　より

$\dfrac{y+y}{2}=x\times x-2(x+x)$

よって $(1,-3)$ における接線は

$\dfrac{y-3}{2}=x\times 1-2(x+1)$

$\therefore y=-2x-1$　答

参考

円の接線の方程式のアナロジーである．

$$\frac{y+y}{2}=x\times x-2(x+x) \quad ※$$

において，※上の点を (x_1,y_1) とすると

$$\frac{y+y_1}{2}=x\times x_1-2(x+x_1) \quad ※※$$

※※は次の性質を持つ

① (x_1,y_1) を通る直線である

② (x_1,y_1) に近い点に対して，$y=x^2-4x$ とほぼ同じふるまいをする
（$y=x^2-4x$ に代入したものとほぼ同じ式だから）

①②より※は(x_1,y_1) における接線を表す．

かなりマニアックな手法だが，
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1,y_1) における接線の方程式 $x_1x+y_1y=r^2$ の補足説明に触れてみてもいいし，陰関数で表される関数など，特に数学C（次年度からは数学Ⅲ）の二次曲線の接線に応用してみる手もある．

例１

$y^2=4x$ の$(1,2)$ における接線の方程式を求めよ．

解答

$yy=2x+2x$　とすると接線の方程式は

$2y=2x+2$　よって$y=x+1$　答

例２

$y=x^3-3x$ の$(2,2)$ における接線の方程式を求めよ．

$\dfrac{y+y+y}{3}=xxx-(x+x+x)$　として

接線は　$\dfrac{y+2+2}{3}=4x-x-4$　$\therefore y=9x-16$　答

COFFEE　BREAK 16

九九の表はあなどれない

昔，東京駅前にある丸善の洋書コーナーで，外国で使われている九九の表をみつけ，買ってきました．日本と違って，12×12 までの表になっています．（写真上）

たかが九九の表とあなどるなかれ．これを眺めていると，いろいろなことが見えてくるのです．

● **数字の総和**

九九の表にある 81 個の数字を全部加えるといくらになるでしょう.

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2=(\frac{1}{2}\times 9\times 10)^2$$

ですよね．このような計算を「田んぼ算」といいます.

● 立法和

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図のＬ字型の部分の数の和は

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$

となっていますから（要証明！），

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$

$=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$

が言えます．**立法和の説明に使えそうですね.**

● コーナーの和（中央値）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	B
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	C
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

例えば長方形Ａのコーナーの数の和は

4+8+8+16=36

これは，中央の数の 4 倍です.

長方形Ｂの場合は，コーナーの和は中央の 4 つの数の和です.

長方形Ｃでもやはり

25+45+81+45=36+48+64+48=49×4

となっています.

皆さんも面白い性質を見つけてください.