25　円の接線の方程式にまつわるお話

単元等　数学Ⅱ　図形と式（円の接線の方程式）

◆Contents

・円の図示と垂直のイメージ

・円の接線の方程式

・極と極線の方程式

・宮沢賢治が研究した直線の方程式

1　授業の内容

(1)円に直線が接する条件

(2)円の接線の方程式

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問におじゃまして，授業を見せていただきありがとうございます．本時の目標に進む過程で，既習事項を丁寧に確認しながら，数学が不得意である生徒達も含め，全員を「わかる」に導いていくような授業だったと思います．

また，生徒の不完全な応答に対しても，きちんと向き合って，納得するまで対話していくという姿勢にとても感心しました．

クラス経営，部活動，校務分掌等大いに期待されている先生であると校長先生からも伺っております．これからも若さを活かし，この勢いで頑張って下さい．

3　補足すること

さて，私は，個別訪問を行った先生に対し，主に教材研究ネタやトピックスを中心に話題を提供しております．

今回は，円と直線，接線の方程式にからんで，いくつか述べさせていただきたいと思います．

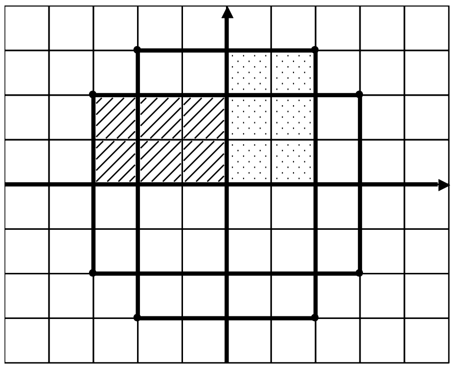
円の図示と垂直のイメージ

一般に，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ において，r^2 の値をいろいろ調べてみると，もちろん，$1,4,9,16,25$ などの平方数になっていることが多いのですが，実は，$5,10,13$ という場合も結構目にします．一方，$3,7,11,$ といった数はあまり見かけません．一般に $4n+3$ 型の素数（とその倍数）は平方和に分解することができません．逆に，$4n+1$ 型素数（とその $4n+3$ 型素数倍数以外の倍数）は，次のように平方和に分解できます．

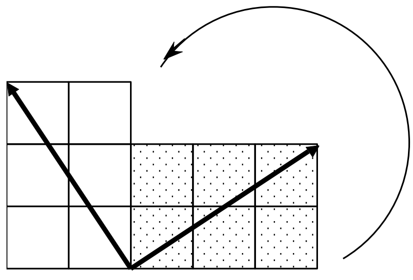
$$5=1^2+2^2$$
$$10=1^2+3^2$$
$$13=2^2+3^2$$
$$34=3^2+5^2$$

問題を作る背景にはこのようなこともあるわけです．であれば，平方和を見つけて，円を作図するガイドにするのも一つの手だと思います．

例えば，$x^2+y^2=13$ だったら，頂点が原点に重なるように２×３，３×２の長方形を全部で８個描いて，その頂点を結んでいけばうまく作図できますね（下図）．



次に，垂直条件の図形的なイメージについて考えてみます．



横３縦２の打点長方形に着目して下さい．傾き

$\frac{2}{3}$ の直線が引かれています．さて，今，この長方形を正の方向（負でもよい）に 90° 回転します．すると，図のように，横２縦３の長方形になります．つまり，縦横が逆になるわけです．

x 方向の向きが反対なので，傾きは $-\frac{3}{2}$ になります．次のように考えれば分かりやすいでしょう．

「垂直「は「反逆」である

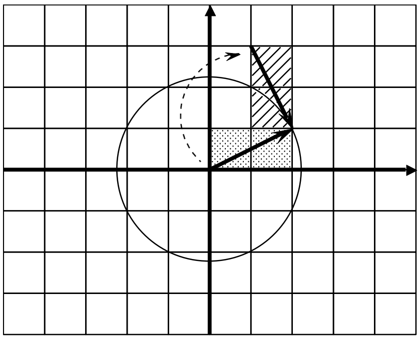
以前，私は下のような図を描いたりして，垂直条件の「傾き×傾き＝－１」を説明していましたが，「反逆」の方が，受けもいいし，応用も広いので，最近はもっぱら「反逆」で説明しています．

例えば，$\vec{a}=(1,2)$ に垂直で大きさが３のベクトルを求める場合，次のような３手詰めでさっさと求められます．

第1手（反逆）　$(-2,1)$
第2手　大きさを１にする
$\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$　←この瞬間大きさ１
第3手　大きさを３にする（逆向き考慮）
$\pm\frac{3}{\sqrt{5}}(-2,1)$　答

では，ここまで述べた２つの考えを使って，円 $x^2+y^2=5$ の周上の点 $(2,1)$ における接線の方程式を考えてみましょう．

まず，$5=1^2+2^2$ なので，１×２，２×１の長方形をガイドにして円を描きます．



このとき，上図打点部分の２×１の長方形を点 $(2,1)$ の回りに－90° 回転させると，あら簡単，接線ができました．この接線は，点 $(2,1)$ を通り，傾き -2 の直線なので，求める接線は

$y=-2x+5$　とわかります．

特に，数学が苦手な生徒には，座標や代数計算の積み上げのような「手の運動」の世界だけで教え込んでも，計算部分がネックになったり，途中でモチベーションが無くなり挫折して本質に辿りつかないことも起こり得ます．ならば，多少ごまかし？的でも，イメージを大切にした説明も併せて行って見るのもよいのではないかと思います．

円の接線の方程式

教科書では

円　$x^2+y^2=r^2$ 上の点 (p,q) における接線の方程式は　$px+qy=r^2$　である

と述べられています．

ところで，円上のある点における接線はただ１本しか引けないので，円上の点と接線は１対１に対応しています．そこで次のことが言えます．

直線の方程式 $px+qy=r^2$ (※)において，$p^2+q^2=r^2$ ならば，(※)は円 $x^2+y^2=r^2$ の接線であり，接点の座標は (p,q) である．

このことからいくつかの問題を眺めてみましょう．

問題１
$x^2+y^2=4$ と $y=x+k$ （$k>0$）が接するとき，k の値を求めよ．またそのときの接点の座標を求めよ．

y を消去してまとめると
$2x^2+2kx+k^2-4=0$
接することより　$D=0$ として
$k^2=8$　$\therefore k=2\sqrt{2}$ ($k>0$)
このとき接線の方程式は
$y=x+2\sqrt{2}$
$-x+y=2\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y=4$　←この変形がポイント
よって接点の座標は　$(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$

問題２
直線　$y=2x+1$ は原点中心で半径がいくつの円に接するか

$-2x+y=1$　※
$(-2)^2+1^2=5$ に注意して，※の両辺に５をかけると
$-2(5x)+1\cdot(5y)=5$
$s=5x\,,t=5y$　とおくと
　$-2s+t=5$
$(s\,,t)$ 平面上で半径 $\sqrt{5}$ の円に接しているので，
$(x\,,y)$ 平面上では半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ の円に接している．

別解
$(s\,,t)$ 平面上での接点は $s=-2\,,t=1$
すなわち，$x=-\dfrac{2}{5}\,,y=\dfrac{1}{5}$
よって半径を r とすると，$r=\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{1}{25}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

極と極線の方程式

円外にある点から，円に引いた接線の方程式を求める問題は，公式一発で求めることはできません．例えば，「円 $x^2+y^2=5$ に，点 $(6,3)$ から引いた接線を求めよ」などという問題に対して，

円上の点における接線の公式を不用意に適用させて，　$6x+3y=5$　としてしまう答案によくめぐり合います．

もちろんこの解答は間違えですが，この直線 $6x+3y=5$ に何か意味はないか考えてみたいと思います．

円 $x^2+y^2=5$ に $(6,3)$ から２本の接線が引けるので，それぞれの接点の座標を (x_1,y_1) (x_2,y_2) とします．

すると，２つの接線の方程式は

$$\begin{cases} x_1x+y_1y=5 & \cdots① \\ x_2x+y_2y=5 & \cdots② \end{cases}$$ とおけます．

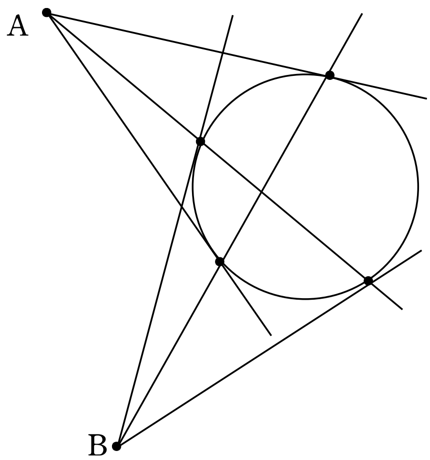
ここで，①②はともに $(6,3)$ を通るので，

$$\begin{cases} 6x_1+3y_1=5 & \cdots③ \\ 6x_2+3y_2=5 & \cdots④ \end{cases}$$

③④から，直線 $6x+3y=5$ は (x_1,y_1)，(x_2,y_2) を通ることがわかります．

よって，$6x+3y=5$ は円 $x^2+y^2=5$ の，２つの接線の接点を結ぶ直線であることがわかります．

このような直線を極線，$(6,3)$ を極といいます．極は，いわば射影の中心で，極の動きに連動して極線が変化します．例えば，極 A の極線上の点 B を極として極線を考えると，それは，A を通るという面白い性質もあります（図参照）．



極，極線は射影幾何の基礎となるとても重要な概念です．

宮沢賢治が研究した直線の方程式

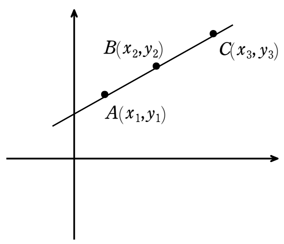
宮沢賢治記念館に行くと，彼の数学ノートの一部が展示されています．賢治は，大正 10 年からほぼ 5 年間，農学校で数学を教えていたとされています．ちなみに用いていた教科書は，「高等数学講座」（高木貞治他）だったのですが，その他に，「代数的解析本論」「微分積分精義」（河野徳助）などの本を勉強していたようです．

さて，賢治のノートには 20 種もの直線の方程式が記されています．賢治が自ら発見したのか，それとも本から抜き出したかわかりませんが，ヘッセの標準形など高度なものも見られます．

では，その中から，私が興味を持ったものを一つ紹介したいと思います．

（Vol.Ⅱ）

$(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)=0$ 〔12〕



〔12〕とあるので，第 12 番目の直線の方程式ということでしょう．奇妙な形をした式なのですが，一体この式にはどんな意味があるのでしょう．

分かりやすいように，式を変形してみましょう．

$$-x_3(y_2-y_1)+y_3(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

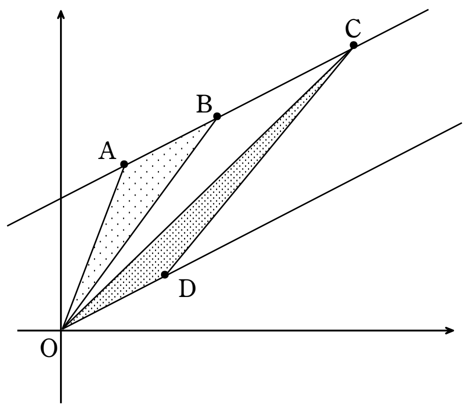
$$x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)=(x_1y_2-x_2y_1)$$

$$\frac{1}{2}\{x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)\}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) \quad ※$$

※のように変形すると意味が見えてきます．

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$

$D(x_2-x_1,y_2-y_1)$ とおくと，A，B，C，Dが図のような配置のとき，※の左辺は，△ＯＣＤの面積，右辺は△ＯＡＢの面積を表す式になっています．



ポイントは，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$ と，

$\overrightarrow{OX}=(p,q)$, $\overrightarrow{OY}=(r,s)$ のとき

$\triangle OXY=\frac{1}{2}|ps-qr|$

です．

ここで，もう少しこの式を使いやすくするために，$C(x,y)$ とし，Ｃを動点と見ることにしましょう．すると，次のような式になります．

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=x_1y_2-y_1x_2$$

新しいタイプの「2 点を通る直線の方程式の公式」が出来上がりました．「賢治の公式」と名づけておきます．

では，具体例をやってみましょう．

例　2点 $A(1,3)$, $B(5,8)$ を通る直線の方程式を求めよ．

（求め方）

$B(5,8)$
$A(1,3)$ -------- $5\times3-8\times1=7$

$D(4,5)$
$P(x,y)$ -------- $4y-5x$

$4y-5x=7$　答

Ｄを作って，たすきがけを 2 回行えば終了．現在でも通用する公式になるかもしれませんね．