20　解と係数の関係のアプローチ

単元等　数学Ⅱ　式と証明（解と係数の関係）

◆Contents

・解と係数の関係あれこれ

1　授業の内容

２次方程式の解と係数の関係

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問で授業を見せていただきありがとうございました. ４人の数学科全員が授業を公開し，授業研究会も２度行うなど，充実した OJT の持ち方をされているのに驚きました.

また，研究会の雰囲気も互いに高めあおうという良い雰囲気で行われておりました．今度とも数学科内での研修を深めていただければと思います.

先生の授業は，板書や説明がとても丁寧であり，また，ノート指導もしっかり行われていて，ポイントや公式などを見易くまとめるような指導が見られました．板書も生徒のノートに連動する形で計画されていたことも素晴らしいと思いました.

また，解の公式で求めた２つの解の和と積を，敢えて苦労して計算することで，解と係数の関係の良さを強調された場面もよく考えていたと思いました.

研究会でも述べましたが，本校の２年生は今年の基礎力確認調査で「数学の授業が分かりますか」の質問に対して約８割の生徒が肯定的な回答をしています．これは，先生のきめ細やかな指導が生徒に浸透しているからだと思います．今後とも頑張ってください.

3　補足すること

私は，授業者の先生に「所感」として，主に教材ネタを提供させていただいております.

今回は，解と係数の関係について触れてみたいと思います.

解と係数の関係あれこれ

授業で使われた第一学習社の教科書の問題からいくつか問題を取り上げてみたいと思います.

例題２

2次方程式　$x^2+2x+3=0$の２つの解をα, βとするとき，$\alpha^2+\beta^2$の値を求めよ.

<一般的な解法>

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=4-6=-2$$ 答

<次数を下げる方法>

α, β は　$x^2+2x+3=0$の解なので

$\alpha^2+2\alpha+3=0$

$\beta^2+2\beta+3=0$

よって

$\alpha^2=-2\alpha-3$

$\beta^2=-2\beta-3$

辺々加えて

$\alpha^2+\beta^2=-2(\alpha+\beta)-6=-2$

次数を下げる方法は，対称式変形ができなくても，帰納的に次々と$\alpha^n+\beta^n$を計算できる良さがあります. また，3 次方程式の解と係数の問題では，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$や$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$など対称式変形が大変な場合にも有効な手法です.

問11

2次方程式 $x^2-4x+2=0$ の２つの解をα, βとするとき，次の式の値を求めよ.

(1)　$(\alpha-2)(\beta-2)$

<一般的な解法>

解と係数の関係より $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$

$$(2-\alpha)(2-\beta)=4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta$$
$$=4-8+2=-2$$ 答

＜恒等式の考えを用いる解法＞

α, β を解とする2次方程式は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$

これと $x^2-4x+2=0$ は同じなので，

それぞれの左辺を比較すると

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-4x+2$

これは恒等式なので $x=2$ として

$(2-\alpha)(2-\beta)=4-8+2=-2$　答

現行の一般の教科書では，恒等式は方程式の後に続く形になっているので教えづらいかもしれません．もし恒等式を先にやっていれば，解と係数の関係は次のように示すこともできます．

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a(x-\alpha)(x-\beta)\\
&=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta
\end{aligned}
$$

係数を比較し

$b=-a(\alpha+\beta)$, $c=a\alpha\beta$

よって　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

このような考えも必要なので，方程式の単元に入る前に恒等式をやっておくのも一考かもしれません．

問11

2次方程式 $x^2-4x+2=0$ の２つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(3)　$(\alpha-\beta)^2$

＜一般的な解法＞

解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\\
&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16-8=8
\end{aligned}
$$
答

＜判別式＞

一般に，2次方程式　$ax^2+bx+c=0$

の２つの解を α, β とすると，

$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とおける

$\alpha-\beta=\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　すなわち $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$

よって，$(\alpha-\beta)^2=(-4)^2-4\cdot 2=8$　答

判別式を $D=b^2-4ac$ とするのは，解の公式において，ルートの中の符号を考えることによるものです．

一方，実数及び複素数の性質と，方程式の理論から，判別式を $D=(\alpha-\beta)^2$ と定義することもできます．

もし α と β が異なる実数であれば，実数条件から

$D=(\alpha-\beta)^2>0$

$\alpha=\beta$ のときは $D=(\alpha-\beta)^2=0$

α と β が異なる虚数解のときは，２つは互いに共役なので，$\alpha-\beta$ は純虚数となり，

$D=(\alpha-\beta)^2<0$　がわかります．

確かに解を判別することができました．

このような考え方を使うと，3 次方程式の判別式は，$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ と表すことができます．

解と係数の関係を最初に研究したのは，16 世紀のフランスの数学者ヴィエトといわれています．彼は，方程式の解に潜む対称性に着目しました．その後 18 世紀には，フランスのヴァンデルモンドが，方程式の解に対して，写像の考えを取り入れ，方程式論が発展していきます．そして，19 世紀に入り，アーベル，ガロアによって，体論と群論という新しい数学によって方程式が四則演算とべき根で解ける条件が解明されたわけです．