19　数の発展～複素数の世界へ～

単元等　数学Ⅱ　方程式（複素数とその演算）

◆Contents

・代数方程式と数の拡張

・負の数の平方根と i の関係

・複素数のイメージ

1　授業の内容

(1)前時の確認テスト

(2)負の数の平方根の説明

(3)練習問題・まとめ

2　授業を見ての所感

授業全体を通しての印象

まず，とても丁寧な授業予定表（カラー用紙）が生徒に提示されていて，授業や家庭学習の計画がしっかり目に見える形になっていることに感心しました．

冒頭の確認テストと相互評価，教科書の重要な概念を一斉に読ませる言語活動など，様々なきめ細かな配慮が見られました．また，最後の確認テストでは，生徒からの授業評価を行い，次の授業へのフィードバックを考えていたこともよい取り組みだと思います．

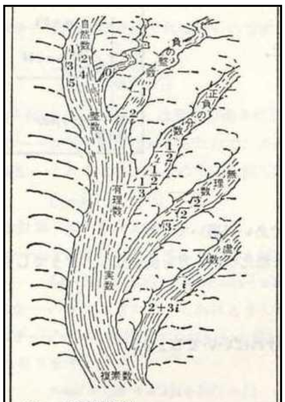
文科省指定の学力向上実践研究最終年の今年に，震災により仕分けされてしまったのですが，これまでの2年間の取り組みが，生徒の学習の習慣化や，数学科のチームワークの良さにしっかりと活かされており，無駄になっていないなあと感じました．

教室に「凡事徹底」という標語が貼られていましたが，あたりまえのことをあたりまえに行うことは簡単なようで難しいことです．
それを，数学科全員で共通理解して取り組んでいる姿勢は大いに評価されることだと思います．

2　補足したいこと

私からは，授業技術というよりも，教材研究のヒントとして話題提供させてもらいたいと思います．参考にしていただければ幸いです．

代数方程式と数の拡張


⑩――数の発展経路

数の世界は，自然数から始まり，整数，有理数，実数そして最後に複素数へと拡張されてきました．左図（遠山啓氏による）の様に，川で表現するとイメージしやすいですね．

数が拡張されていく過程には動機があります．それは「演算の顔を立てるため」といってもいいのではないかと思います．

例えば，その島が世界のすべてだと思っていた島国に住む人々が，ある日船を発明して旅に出ると他の大陸を発見した．今度は飛行機を発明し，地球の裏側の国を発見した．更に宇宙ロケットを発明し，地球外の知的生命体を発見・・・．

あまり良い例ではなかったですね．つまり，加法の逆演算（減法）が自然数の世界から整数の世界へ数を拡げ，そして乗法の逆演算（除法）が有理数の世界を導いていったということをいいたかったのです．

もう少し具体的に述べましょう．例えば $x+3=5$ という方程式を解くには，$x=5-3$ という減法を定義して $x=2$ という解を得ました．では，$x+7=5$ の場合はどうなるでしょう．$x=5-7$ とすると，自然数だけの世界では「解なし」となります．
同様に，$3x=5$ という方程式を解く場合も整数

の世界だけでは「解なし」となります．

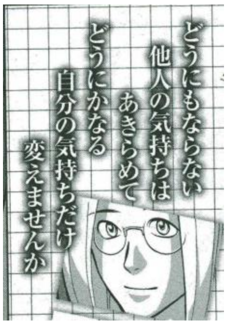
このような場合，人類がとる道は次の２つです．

1　解がないので，この方程式は不合理だとする

2　この方程式にも解を持たせるために，数の範囲を拡げていく

人間は，他の動物と違って，わからないことをわかろうとする欲求，物事を発展拡大して考えていこうという属性を持つといわれています．

数学の世界では，特に２の立場をとりながら進歩してきたわけですね．



「どうにもならない他人の気持ちはあきらめて，なんとかなる自分の気持ちを変えてみませんか」

本当は恋愛の話ですが，数学でも使えます．方程式のワガママを通すために，数の世界の方を変えてみましょうということです．すみません余計な話でした．（少女ファイト/日本橋ヨヲコ）

では，四則演算（加減乗除）の逆演算とは何でしょう．次のような演算を考えてみます．

「-4 を 2 倍して 1 を足し，それをある謎の数 x で割ったところ，$x+4$ になった」

このとき x はどのように求めればよいでしょう．

式を作ると，$\dfrac{-4\times 2+1}{x}=x+4$

これを整理すると，

$x^2+4x+7=0$　となります．

つまり，「四則演算」の逆演算は「代数方程式を解くこと」に当たります．

ところで，この方程式は，平方完成すると $(x+2)^2=-3$ となってしまい，実数の世界では「解なし」となります．

代数方程式が，いつでも自在に解を持たせるために，虚数単位 i を用いて，数の世界を拡張したのが複素数の世界というわけですね．

負の数の平方根と i の関係

5 の平方根は $\pm\sqrt{5}$ である．では-5 の平方根はどうなるか．正解は「実数の範囲では存在しない」です．でも，敢えて，実数の場合と同じように $\pm\sqrt{-5}$ とすることを許して数の世界を拡げてみました．

ところが，ここで問題があります．「-5 の平方根」ということは，「2 乗すると-5 になる」ということです．ところが，

$$(\sqrt{-5})^2=(\sqrt{-5})(\sqrt{-5})=\sqrt{(-5)(-5)}=\sqrt{25}=5$$

困ったことに，2 乗してみると-5 ではなく 5 になってしまいました．

数の世界を拡げた代償に，ルートの計算規則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ が効かなくなってしまったのです．数学の世界では，拡張していく場合に重要なことは，「それまで使ってきた法則をそのまま保存できる」（自然な拡張）ということです．例えば，指数関数のところで，指数が負になったとたんそれまでの指数法則が崩れてしまったのでは意味がありません．それまでの法則を満たす形での定義（Well-Defined）を目指さなければ，拡張しても，発展性がないわけです．

そこで，ルートの中に負の数が入るのを回避しながら，負の数の平方根を定義して，しかも，今まで行ってきた四則演算の法則が自由に行えるようにしようという「うまい（ずるい）」方法を考えなければなりません．それで i が登場するわけです．

教科書では，2 乗して-1 になる数として i を定義し，実数に i を添加した世界が，四則演算について閉じていることを示しています．因みに，四則演算が自由に行える数の世界を「体」といいます．実数は「体」ですね（実数体 R という）．今，それに i を添加した世界は，実数全体を包含

しながら，かつ四則演算の仕方が全部保存され，閉じた世界になっているわけです（複素数体 C という）．違いは，$i^2=-1$ というルールです．後は，普通の文字と同じように，結合法則，交換法則，約分など自在に行ってよいのです．

このように i を定義すると，−5 の平方根を $\sqrt{5}\times i=\sqrt{5}i$ とするのは自然な定義で、

$(\sqrt{5}i)^2=(\sqrt{5}i)(\sqrt{5}i)=\sqrt{5}\sqrt{5}i^2=5\times(-1)=-5$

となり Well-Defined です．

このように，複素数体 C を構成しておけば，2 次方程式はいつでも 2 つの解を持つことになりますし，更に発展して，n 次方程式は複素数の範囲で n 個の解を持つ（代数学の基本定理）ことも示されます．

複素数のイメージ

研究協議の中で，私は複素数には 3 つの顔があるといいました．それは

① 代数方程式の解，つまり数の拡張としての複素数

② 点やベクトルとしての複素数

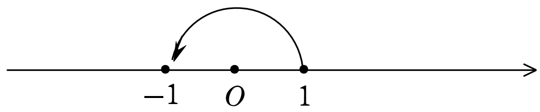
③ 変換としての複素数

新カリキュラムでは複素数平面が再び登場するのですが，とりあえず，現段階では②や③については数Ⅱの授業であつかうことは難しいと思います．

実数は，ものの大きさや量，順序など具体的に目に見える世界（マジな世界）なのでイメージはできるけれど，虚数になると，大小関係が無いため，イメージを描くことができず，常に「想像上（イ・マジ也）」の数だとしていかなければいけません．抽象的な概念を考えることはそれはそれで重要ですが，目に見えるもので表現して見ることも余裕があればやってみてもいいのかなと思います（私はやっていた）．

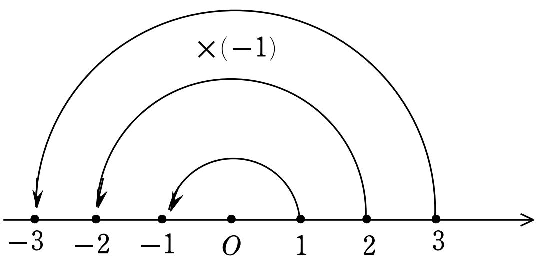
例えば次のように，おおざっぱに複素数を平面上の点として見せることができます．

◆ステップ 1



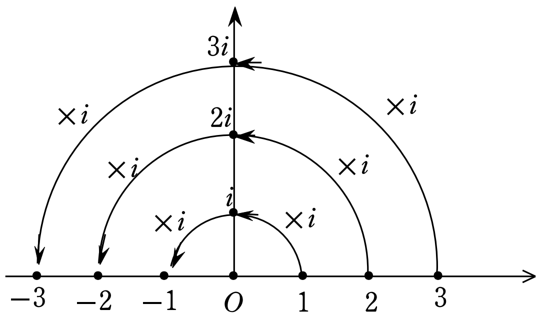
−1 は，数直線上の 1 を原点のまわりに 180°回転させた地点にある．

◆ステップ 2



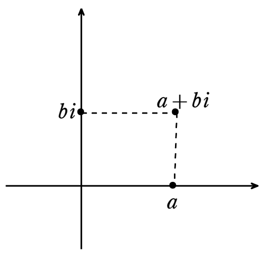
−1 をかけることは，原点のまわりに 180°平面の中で回転させる「操作」と見ることができる．

◆ステップ 3



$i^2=-1$ だから，$\times i$ を 2 回繰り返すと 180°の回転となる．ということは，$\times i$ を原点のまわり 90°の回転とみるのが自然である．

このことから，純虚数は図のような原点を通る，数直線に垂直な直線（虚軸）上の点として表すことができる．



$a+bi$ は，図のように順序対 (a,b) と同一視して座標平面（ガウス平面）上の点として表現すると都合がよい．

COFFEE　BREAK 10

数学的活動

すうがく通信 11 号より

今回の学習指導要領の改定では，高等学校数学科の目標として，次のように記されています．

数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的根拠に基づいて判断する態度を育てる．

ちなみに，現行の内容は以下の通りです．

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる．

冒頭の言葉からもわかるように，今回の改訂の大きな柱として「数学的活動」が取り上げられています．そこで，今回は，この「数学的活動」について考えたいと思います．指導要領によると，数学的活動とは「生徒が目的意識を持って主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」と規定されています．更に「目的意識を持って主体的に取り組む」とは「新たな性質や考え方を見出そうとしたり，具体的な課題を解決しようとしたりすること」と記されています．これだけだと，具体的なイメージがつかめませんね．指導要領解説によると，更に，高等学校で重視する数学的活動について次の３つをポイントあげています．

①自ら課題を見出し，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させること．

②学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること．

③自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり議論したりすること．

そして，数学的活動を通じて「思索することの楽しさ」を培うということが述べられています．だとすると，数学的活動というのは，そう難しいことではないと思われます．例えば，入試問題演習の中にだって，そこに，考える楽しさや，発展的に考える面白さがあればそれは数学的活動といってよいはずです．

つまり，数学的活動といっても，ことさら操作や実験，観察を行えということではないし，むしろ，思索することを軽視した，実験や作業などは数学的活動とは言えないということです．

中央教育審議会の答申では，数学的活動の内容について次のように述べられています．

「数学的活動とは，試行錯誤したり，資料を収集整理したり，観察したり，操作することなどの活動も含まれ得るが，教師の説明を一方的に聞くだけの学習や，単なる計算練習を行うだけの学習などは含まれない」

つまり，穿った見方をすると，今「数学的活動」がことさら取り沙汰される背景に，「教師の説明を一方的に聞くだけの学習や，単なる計算練習を行う」だけの「憂うべき」学習が蔓延している状況があるため，それに対する警鐘・提言と見ることもできるかもしれません．

学力を高めるための授業力とは，教師が一方的に説明したり，作業プリントをさせるだけといった，生徒の考える楽しさ（＝生徒の数学的活動），を奪うような授業をやらないという意識を持つことが，その第一歩かと思います．