

## 5 絶対値を見て考えることは

単元等 数学 I 数と式・二次関数

### ◆Contents

- ・二次関数の軸対称性
- ・絶対値

## 1 授業の内容

- (1) 宿題の評価
- (2) 2次関数の応用問題演習
  - ①  $y = |x+2| + |x-1|$
  - ②  $y = |x|(x-2)$
  - ③  $y = (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)$   
( $-3 \leq x \leq 0$ )
  - ④  $y = x^2 - 2ax + 6$  ( $-1 \leq x \leq 3$ )における最小値が2のとき  $a$  の値を求めよ.

## 2 授業を見ての所感

先日は個別訪問で、授業を見せていただきありがとうございます。

数学をそれほど得意とする生徒集団ではないにもかかわらず、レベルダウンをせず、高い学識と経験に裏打ちされた「わかって力のつく炎の授業」を拝見することができました。

具体的に感心した部分を記します。

- ① 生徒に自信を持たせるために、進歩を認めながら、褒める指導を積極的に行っていたこと。
- ② 説明を一面的に行わず、生徒の定着を確認しながら、ステップを踏んでいたこと。
- ③ 授業の冒頭に一人一人の課題の評価を行い、生徒個々の定着状況や、問題点を把握した上で発問を行うなど、実態を踏まえた授業展開を行っていたこと。
- ④ ベテランで指導力のある先生であるが、自身の授業力を向上させるため、虚心坦懐に研究協議に臨んでいること。などです。

ある意味、自尊心が低い生徒たちをエンカレッジし生徒を導く、迫力ある熱い授業展開と入魂のパフォーマンスに、先生の数学への情熱と、授業に対する強い自信を垣間見た気がします。また、本時は、非常に高度な問題の解説を中心とする授業だったにもかかわらず、ほぼ全員きちんと理解していることにも驚きました。

## 3 補足すること

私は、個別訪問を行った先生方に対し、「所感」として主に教材研究の材料について送付させていただいておりました。実は、先生にということだけではなく、最終的には教材ネタの部分を、県内の数学科の先生方に教材集として配布することを目論みながら作成しております。

そういうわけで、今回は2次関数と、絶対値の指導に関わる部分を簡単に述べようと思います。

### ■ 2次関数の軸対称性

先生の指導の中で、2次関数の対称性について徹底されていたことに感心しました。

例えば、 $y = x(x-2)$  のグラフの概形を描く場面で、ほとんどの生徒が、 $x$  軸との交点の座標を  $(0,0), (2,0)$  とした後、2点の midpoint の座標を求め、軸の方程式を  $x=1$  としていました。

軸の方程式を、平方完成からだけでなく、対称性に着目して導き出すことは、平易であるだけでなく、2次関数の本質をついたものだと思います。

教科書にはないのですが、以下のようにして頂点を求めさせる手法もありそうです。

$$y = ax^2 + bx + c$$
定数項を取り除いて ( $y$  軸方向に  $-c$  平行移動)

$$y = ax^2 + bx = x(ax+b)$$
$$y = 0$$
 として  $x$  軸との交点の座標を求めると

$(0,0), (-\frac{b}{a}, 0)$  この midpoint から軸の方程式は

$$x = -\frac{b}{2a}$$
 (以下これを元の式に代入する)

## ■ 絶対値

絶対値という数学用語が最初に教科書に登場するのは、中学1年の「正負の数」の場面になります。教科書（東京書籍）によると、絶対値とは「数直線上で、ある数に対応する点と原点との距離を、その数の絶対値という」

と書かれています。

更に、絶対値の性質として

- ・ 負の数は、絶対値が大きいほど小さい
- ・ 絶対値の等しい異符号の2数の和は0である

また、2数の和に関する約束として

- ・ 同符号の場合は、絶対値の和に共通の符号をつける。

(例  $(-4) + (-6) = -(4+6)$  )

- ・ 異符号の場合は、絶対値の大きい方から小さい方をひき、絶対値の大きいほうの符号をつける。

(例  $(-10) + (+4) = -(10-4)$  )

2数の積についての約束としても

- ・ 同符号の場合は、絶対値の積に正の符号をつける
- ・ 異符号の場合は、絶対値の積に負の符号をつける

とあります。

そして、なんと、

「積の絶対値は、それぞれの数の絶対値の積となる」という性質（式に書けば  $|AB| = |A||B|$ ）も述べられています。

数の絶対値だけでなく、絶対値記号が用いられている、ベクトルの大きさや、複素数の絶対値、行列式などについてもいえる重要な概念がここで登場していたわけです。

絶対値で躓いている生徒がとて多いのが現状であろうと思いますが、中学校での既習事項に留意しながら指導していくことも我々には必要ではないかと思えます。

さて、高校では、絶対値が嫌だ、気持ち悪いという生徒が多いため、早く絶対値をはずすために、技巧的にパターン化する指導が中心になっているのではないかと思います。

例えば、次のような指導です。

### 絶対値を見たら

タイプⅠ（等号）

$|\triangle| = \bullet$  のとき プラスマイナスをつけてははずす  
 $\triangle = \pm \bullet$

タイプⅡ（不等号<のタイプ）

$|\triangle| < \bullet$  マイナスとプラスに挟まれる  
 $-\bullet < \triangle < \bullet$

タイプⅢ（不等号>のタイプ）

$|\triangle| > \bullet$  マイナスより小さい、プラスより大きい  
 $\triangle < -\bullet, \bullet < \triangle$

それ以外は 場合分けで

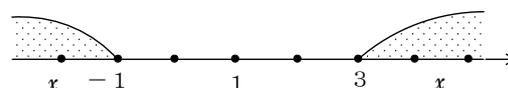
このようなパターン化は、ある意味、思考や判断をともしない「ラク」な手法といえるかもしれませんが、絶対値の定義は「数直線上で、ある数に対応する点と原点との距離」だったので、ときにはそこに戻って説明することが必要です。

例1

$|x-1| > 2$  を解け

問題の意味は

「数直線上で1からの距離が2より大のところはどこか」



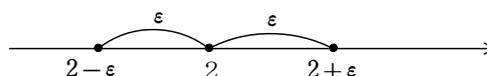
よって、解は  $x < -1, 3 < x$

例2

$|x-2| < \epsilon$  とは何か

問題の意味は

「数直線上で2からの距離が $\epsilon$ 以内のところはどこか」つまり、「2の $\epsilon$ 近傍」



よって、解は  $2-\epsilon < x < 2+\epsilon$

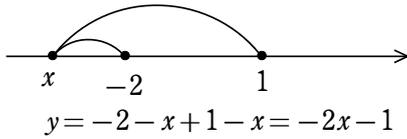
では、次の問題を見てみましょう。

例3  $y = |x+2| + |x-1|$  のグラフを描け

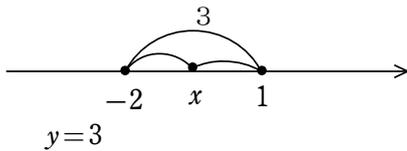
絶対値が2つあるタイプは、先ほどのパターンにはないので、「場合分け」ということになります。場合分けがきちんとできるということはとても大切なことですが、単に「絶対値の中が0以上の場合と負の場合」とするのではなく、意味を考えながら絶対値をはずすことを考えてみます。

式の意味は「数直線上の点-2からの距離と1からの距離の総和」ということなので、図のように数直線を使って考えればよい。

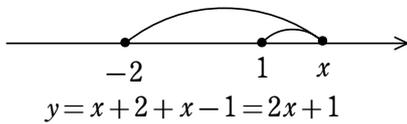
i)  $x < -2$  のとき



ii)  $-2 \leq x < 1$  のとき



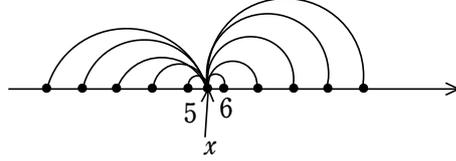
iii)  $1 \leq x$  のとき



この考えだと、絶対値が3つ以上になっても同じように見通して考えることができます。

例4  $5 \leq x \leq 6$  のとき

$\sum_{k=1}^{10} |x-k|$  の値を求めよ。



図から

$$(10-1) + (9-2) + (8-3) + (7-4) + (6-5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

---

## COFFEE BREAK 2



### 私の薦めるこの一冊 ~その2~

---

#### ■ 虚数の情緒 (東海大学出版会) ■ オイラー



一の贈り物(ちくま学芸文庫) / 吉田武  
「虚数の情緒」は、表紙に「中学生からの全方位独学法」と

あるように、中学生の知識があれば独学で読み進められる構成になっている。1000ページにも及ぶその内容はとても深いが、わかりやすい記述と興味をそそる豊富な内容に唸る。「オイラーの贈り物」も吉田氏の名著である。私は、数学科を志望する生徒に読ませている。

---

#### ■ 意味がわかれば数学の風景が見えてくる / 野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小沢健一 (ベレ出版)



これは「微分・積分」「数と計算」「図形・空間」「統計・確率」の「意味がわかるシリーズ」4冊の合本である。合本であっても、データの更新や

書き下ろしもある。4冊分で2,900円はお得。非常にわかりやすい内容で、生徒がどこで躓くかを知りつくしている著者ならではの書である。初版のとき「数の悪魔」を抜いて月刊ベストセラーとなったこともあ

る。尚、著者の一人の伊藤潤一氏は岩手の高校教師である。

---

#### ■ 数学入門上下 / 遠山啓 (岩波新書)



遠山氏は、数学者であると同時に、教育者として多くの功績をのこした

人物であり、彼の影響を受けている数学者や数学教育者は数しれない。この本は、高校生と数学教師向けに書かれている。教科書に書いてあることの背景、意味、本質的なことを知りたい時はこの本が最適である。

---

#### ■ 数学用語と記号物語 (裳華房)

#### ■ 授業を楽しくする数学用語の由来 (明治図書) / 片野善一郎



「正弦はなぜ sin か」「関数はなぜ function なのか」など、数学用語に関する話題が豊富

である。そして、その語源や歴史的流れを知ることで、その本質に迫ることができる内容になっている。

授業での話題や、生徒の疑問に答えるためにも、教師必携の書であるように思う。