２　有理化の意味を考える

単元等　数学Ⅰ　数と式（無理数）

◆Contents

・無理数の有理化

・拡大体（2 次体）

・有理化を目で見る（A 版 B 版）

１　授業の内容

(1)分母の有理化の説明

(2)有理化の問題演習・まとめ

２　授業を見ての所感

習熟度に分けて目が行き届く指導を行っていること，個々にバインダーを与え配布プリント等をきちんと整理させていること，机間巡視などで生徒のフォローをしっかり行っていることなど，非常にきめ細かい指導をされていることに感服いたしました．生徒の規律や授業姿勢がしっかりしているのは，そのような継続的な取り組みの成果によるものだと感じました．

また，生徒全員に発問を行ったり，「磁石」を効果的に利用することで生徒の視線を集めるなど，生徒が授業に参加し，理解を深めるための工夫が随所に見られました．応用クラスだったとはいえ，どの生徒にも学習内容がきちんと伝わった授業だったと思います．

恐らく，生徒たちの多くは，中学時には「お客さん」として，あまりかまわれることがないまま，数学の授業を経験してきたのではないかと思います．そのような中で，数学に対する気持ちも否定的になったり，自分に自信を持てなくなったりすることもあったかもしれません．

先生は，そのような生徒達にしっかりと向き合い「わかったと実感できるような気持ちにさせる」授業を行っていて，それは学力向上だけでなく，生徒が自己肯定感を抱くことや，人間関係を良好なものにするなど，数学の授業を通して生徒指導がなされていると感じました．

３　補足すること

私は，個別訪問を行った先生方に，授業の感想とともに，実施した授業に関する教材ネタを提供しております．

今回は「有理化」というテーマで少し述べさせていただこうと思います．

なぜ有理化を行うか

人類は，自然数から始まって数の世界を「四則演算」とかかわらせながら発展・拡張してきました．例えば整数は加減乗について閉じた世界ですが，除法を行うと整数の世界からはみ出してしまいます．一方，有理数の世界は，加減乗除について閉じた世界です．このように四則演算がその世界の中で自由に行える場合，その世界を「体」といいます．そのことを強調して，有理数は一般に有理数体（Q という記号を用いる）といわれます．

さて，私たちは，更に平方根という概念を学び，整数の比に表せない「無理数」へと数を拡張してきました．

例えば $\sqrt{2}$ という無理数に対し，これと，これまで学んだ有理数との四則演算について閉じている世界を作ることを考えましょう．

$a+b\sqrt{2}$（a,b は有理数）という形で表される数の世界を考えるのが自然です．さて，はたしてこのような形で表される数は四則演算について閉じているか，ということが問題です．閉じていれば，有理数から一つレベルの高い「体」を作ったことになります．

では調べてみましょう．

○加法（減法）

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

OK！

○**乗法**

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$

$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$　　OK！

○**除法**

　さて，除法が問題です．はたしてこれが $a+b\sqrt{2}$ の形にできるかということですね．

そこで，有理化が登場します．

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(ac-2bd)+(ad-bc)\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

$$=\frac{(ac-2bd)}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

　となり，めでたく $a+b\sqrt{2}$ の形になりました．

そこで，$a+b\sqrt{2}$ の形に表される世界を有理数体Qに $\sqrt{2}$ を添加した２次の拡大体といいます．

　つまり，有理化は有理数に無理数（ただし平方根で表されるもの）を添加した新しい世界が、四則が成り立つ世界になることを示すために必要な操作ということです．ここで，$a+b\sqrt{2}$ に対して，$a-b\sqrt{2}$ のことを共役元といいます．

そして，その２つの積 a^2-2b^2（の絶対値）をノルムといいます．

　ここで述べたことは授業で生徒に話すというものではありませんが，$a+b\sqrt{m}$ という世界に持っていくことができれば数のおおよその値を把握することができるという便利さは示しておいてもいいかもしれません．

　例えば，$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ は，$\dfrac{1}{2.236\cdots-1.73\cdots}$

となり計算するのは大変ですが，有理化して

$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ とすれば，$\dfrac{2.236\cdots+1.732\cdots}{2}$　となるので，これだと計算しようという気になりますね．

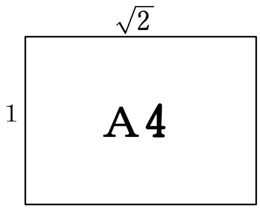
有理化を目で見る

　中学・高校の数学とは「計算の仕方や公式の当てはめ方をひたすら学び続けること」だけでは，生徒のモチベーションを維持させるのは難しいところです．そこで，少しでも面白さや，有用性などを示す教材も考えてみたいと思います．

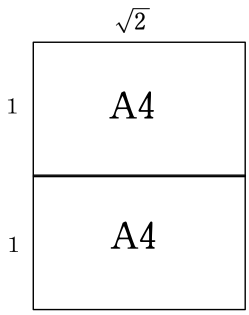
　＜A版の紙の縦横＞

　下図を，A4 サイズの大きさの用紙とします．

長いほうの辺と短いほうの辺の比が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ になっています．なぜそのような比なのでしょうか．

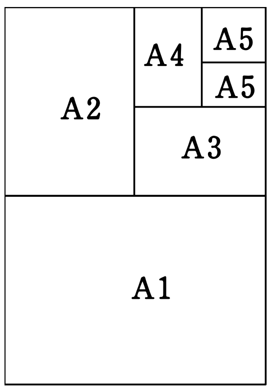


　今，この A4 サイズの用紙２枚をくっつけて並べてみましょう．ここで作られた長方形の長いほうの辺と短いほうの辺の比を求めてみると，



$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となります．

　ここで，有理化を思い出すと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ でありました．ということは，A4 の用紙を２つくっつけて作った長方形は，元の長方形と相似であることがわかります．このサイズの用紙を A３と呼びます．A 版の用紙は，A1・A2・A3・A4・A5・・・・



と皆相似な図形で，半分に切っていくことで次々つくることができます．つまり，A 版は紙の切れ端などを生じさせず無駄なく用紙を作ることができる合理的なサイズということがわかります．