

**1 「～の代わりに～で考える」**

単元等 数学Ⅰ 数と式 (無理数の計算)

◆Contents

- ・ ルートの積の定義
- ・ 同型の考え
- ・ 電卓を使うことについて
- ・ ルートのルーツ

## 1 授業の内容

- (1) 開始時に 48 マス計算 (乗法)
- (2) 生徒に提起  
 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$  や  $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$  の計算はどのように行えばよいか (予想する)
- (3) 電卓を使って予想が正しいことを確かめる
- (4) 根号のついた数の乗法・除法の規則のまとめ
- (5) 確認の問題練習・本時のまとめ

## 2 授業を見ての所感

### ■ 明るく爽やかな印象

テンポよく、メリハリのある授業の進行に感心しました。生徒への指示や黒板での説明も丁寧でよく生徒に伝わっていたと思います。

何より、先生の (花粉症と闘いながらも!) 一生懸命さが子供たちによく伝わっていたのではないかと思います。

授業後の合評会でも、先生の真摯に学ぼうとする姿勢に好感が持てました。このような姿勢があればこれからも素晴らしい授業を行っていくことができるかと確信しています。

### ■ 生徒の掌握

16人クラスで、しかも T.T. ということで、生徒一人一人に目が届いていたのではないかと思います。日頃から生徒と先生の間により関係が築かれていると思いました。ただ、先生の元気に比べ、数学に対する苦手意識からなのか、生徒はやや元気がなかったかなという気はしました。

### ■ 授業の内容に関わって

当日は敢えて申し上げませんが、少し内容に突っ込んで自分なりの感想を述べたいと思います。

#### 【導入の発問について】

まず、「 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$  はどうなると予想できるか」という発問で生徒から  $\sqrt{10}$  を引き出したところ。なぜ、その生徒は  $\sqrt{10}$  と考えたのか。電卓にいく前にその理由を掘り下げてみたかったです。

私なら次のように説明したいと思います。

$(\sqrt{2} \times \sqrt{5})$  の代わりに2乗したもの  $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2$  を考えると、 $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})(\sqrt{2} \times \sqrt{5})$

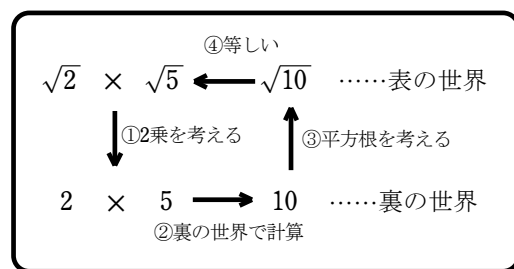
となる。するとこれは、

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{2})^2 (\sqrt{5})^2$  となり、「 $\sqrt{2}$  は2乗して2になる正の数」「 $\sqrt{5}$  は2乗して5になる正の数」なので、 $2 \times 5$  である。

ということは、2乗する前の  $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$  は、2乗して  $2 \times 5$  になる正の数、つまり  $\sqrt{2 \times 5}$  ではないか。

少し回りくどくいいましたが、この点を強調しておけば、教科書の証明にも繋がるのではないかと思います。

この説明のイメージは下図の様な感じです。

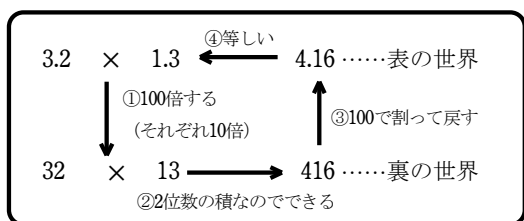


- ①  $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})$  は表の世界で計算ができないので「2乗する」という操作で裏の世界へ
- ② 裏の世界なら普通に計算できる
- ③ ここから「(正の)平方根を取る」という逆操作で表の世界にもどる

「2乗する」操作に対して「(正の)平方根を取る」が逆操作になっています。このことは、小学校で

小数どうしの積を行う時に用いている考え方だと思えます (次の図参照).

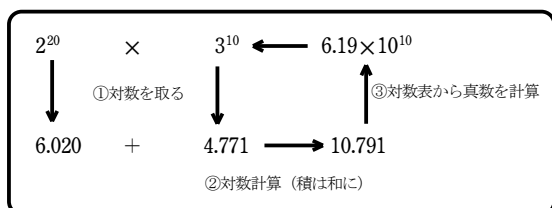
＜小数どうしの積＞



小数どうしの積はまだ定義していないのでそれぞれ 10 倍して 2 位数の積にして, 100 で割って表の世界に戻す. ①→②→③→④がつながったときが「わかる」と認識できるサイクルです.

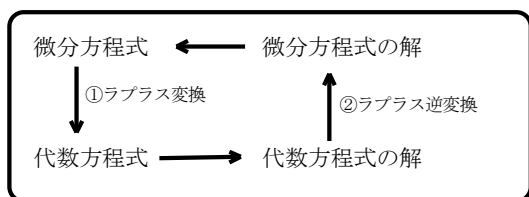
この考えは高校の対数の計算にも現れます.

＜対数計算＞



しつこいようですが, 大学で学ぶラプラス変換も同じ考えです.

＜ラプラス変換＞



このような考え方は, 「同型」という数学的概念につながるととても重要なものではないかと思えます.

### 【電卓を使うことについて】

予想が正しいことを電卓によって検証したわけですが, 高橋先生もおっしゃっていたように, 一つの例のみで, 証明を省いているのが私も気になりました.

「電卓は正しい」は「正しいこと」でしょうか. 電卓という名のブラックボックスのルートキーを押すと答えが返ってくるということが「絶対真実」と仮定することに数学的意味があるとは思えません. むしろ, 高校などで, 上から与えられた公式を鵜呑みにして, 公式に数値をあてはめる操作だけを数学だと勘違いする生徒を作り出す発露になる可能性もあります (高校生に意外と多い).

私なら電卓のルートキーは禁止にして, 自分で求めさせたいと思います (もしかしたら前時で扱ったかもしれません. その場合は, そのことを授業の中で想起させた方が良かったと思います).

1.5 では大きすぎる, 1.4 では少し小さい・・・という試行錯誤で下位桁を次々出していくことはニュートンの行った逐次近似に繋がる数学的活動だと思うし, 生徒の興味も喚起されると思います.

もちろん, 時間が無くなるので, せめて小数第 4 位くらいにして, 興味のある生徒は 12 ケタまでやっごらんと提示して見るのもよいのではないのでしょうか.

1.414 × 2.236 = 3.1617 位でとりあえず

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$  が正しそうだということにして, その後はルートキーを使ってもいいので, いくつかの数で確かめれば, 帰納的な推論(induction)になると思います (割り算も同様).

もう一つ, 合評会のときも言いましたが, せっかく手元に電卓があるのであれば, ついでに  $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{2+5}$  にはならないことも示したいような気がしました (これは 1 個やれば十分ですね). 「ルートの演算はいつでも同じ屋根の下でまとめられる」と考えてしまう生徒が出そうだからです.

さて, 授業では多分 12 桁の計算機を使っていたと思います (私は 100 均で売っている 8 桁の電卓を授業では使っています).

今, 手元にある 12 桁の電卓で

$$1 \div 2 = \dots = \dots = \dots$$

としてみました. すると=を37回押したところで電卓の窓には0が表示されてしまいました. つまり電卓の世界では,  $2^{-37}=0$ ということなのですね. 電卓は基本的に2進数によって計算されるので, 12桁電卓は小数表示については37ビット(1と0の列が37個)で計算されることになります. 対数計算すると  $2^{-37}=10^{-11.137}$

つまり, 12桁電卓では $10^{-12}=0$ と定義されるわけですから. だから小数点以下を最後まで書き込むことに拘泥することはあまり意味のないことです.

例えば  $0.000057 \times 0.0000038$  は,

$$57 \times 38 = 2166 \quad \text{なので}$$

$$0.000057 \times 0.0000038 = 2.166 \times 10^{-10}$$

つまり  $0.0000000002166$  となるのですが, これを12桁電卓で計算すると

$0.00000000021$  となります. つまり37ビット以下の桁落ちが発生し, 正確な値が得られないことがわかります.

もちろんこのことを生徒に教えることはないのですが, 指導する側が把握しておくことは必要かと思います. そして, 時に応じて, 「電卓やコンピュータは絶対ではない」ということを生徒に示していくことも必要かと思います(だから数学が必要である).

電卓からいろいろなことを述べましたが, 結局私がいいたいことをまとめると

おおまかな数で推論し, 後はそれを数学によって論証する

ということになります.

### 3 おわりに

今回先生の授業を拝見する中で, 私自身多くのことを勉強しました. これまで述べたことは, 先生への授業に対する評価や注文ということではなく, この単元の教授法について自分なりに勉強した内容をあかしたものに過ぎません.

よい授業作りは授業前だけでなく, むしろ授業後に始まるとするならば, ここで述べたささやかなことが少しでもが参考になればありがたいと思います. いずれ先生が本時の学習課題としていた

根号のついた数の乗法や除法の計算ができるようになる

という活用能力は, 生徒のノートや板書などを見ても十分に達成されていたと思います.

今度はセミナーが近づきますが, また先生の授業を拝見するのが楽しみです. 先生の持ち味を生かしながらこれからも頑張ってください.

### オマケのトピックス

「ルートのルーツを探る」というテーマで, 盛岡白百合学園中学・高校に勤務している伊藤潤一先生という方の数学通信(抜粋)を以下に紹介します. 生徒への話題提供になるかも知れません.

なにげに使っている平方根の記号 $\sqrt{\quad}$ は変てこな記号だと思いませんか. 今から千数百年前, 平方根はradix(ラディックス)と呼ばれて,  $Rx$ という記号で表されていました. すなわち  $Rx.9=3 \Rightarrow \sqrt{9}=3$  (同じ) 実はこのradixというラテン語はradish(ラディッシュ: はつか大根)と同じ語源なのだそうです.

何, ラディッシュを知らないですって! サラダなどについてくる赤いカブのことです.

平方根の値を求めるというのは, 昔の人にとってとてもスゴイこと(大変なこと)だったので. ですから, 平方根の値が分かったときの喜びは大変なものだったに違いありません. それは, ラディッシュを引き抜いておいしそうな赤い根を見て, ウワー♪となるのとよく似ていませんか. ところで, ラディッシュを引き抜くときに何がついてくるでしょうか? フッフッフ..それは土がついてくるのです. だから,  $x^2=2$ の解には $\pm$ (プラスマイナスの複号)がつき,  $x=\pm\sqrt{2}$ なのですぞ! (ウソ)

---

## COFFEE BREAK 1



私の薦めるこの一冊  
～その1～

---

### ■ 博士の愛した数式／小川洋子（新潮社）



80分しか記憶が持たない数学者「博士」と「私」と「ルート」のピュアで、知的で、そして切ない愛の物語。博士の愛した数式はご存知  $e^{\pi} + 1 = 0$  だが、このストーリー全体のモチーフとして「完全数」を中心とした数論の面白さが取り上げられている。生徒に読ませたいし、この本を使って授業を展開するのも面白い。尚、著者と藤原正彦氏の対談集「世にも美しい数学入門」(ちくまプリマー)もお薦め。

---

### ■ 天地明察／沖方丁（角川書店）



江戸時代の天文学者（であり碁打ちで数学オタク）渋川春海の生涯を描いた時代小説。春海が全国を測量し、日本の新しい暦法を策定するまでの過程が見事に描かれている。

関孝和などの和算家も登場するが、あらためて、江戸時代の日本の優れた知性に感動を覚える。

和算がらみの小説では「算法少女」(遠藤寛子・ちくま学文)もお薦め。

---

### ■ 数の悪魔／H. M. Enzensberger

訳：丘沢静也（晶文社）



今は数学本ブームらしいが、数学の本は売れるといってもたかが知れている。しかし、10年前にこの本の初版が出たとき、一般の小説などを

凌いで空前のベストセラーとなったのはあまりにも有名。子ども向けに書かれているが、数学に落ちこぼれた大人達が、この本で数学の面白さや楽しさに目覚めたという反響も多かった。数学教師としては、著者の講演を記録した「数学者は城の中」(日本評論社)も読みたいところ。

---

### ■ 美しい数学シリーズ（全6巻）／画：安野光雅 文：野崎昭弘・森毅



安野画伯は日本を代表する絵本作家であるが、数学・科学にも造詣が深い。私は

学生時代「数学セミナー」(日本評論社)に連載していた氏の「算私語録」の大ファンだった。絵本とはいっても、友人である森毅、野崎昭弘という格別の数学者との共著なので、実は組合せ論や論理に関する堂々たる数学書である。巻末に大人向けの解説もついている。尚、安野氏の絵本では、「はじめてであうすうがくの絵本1～3」(福音館)もお薦め。日本にはこんなに凄い本があるのに、眠ってしまっているのは本当にもったいない。