

## 数学科（数学Ⅱ）学習指導案

岩手県立盛岡第三高等学校

副校長 下町 壽男

- 1 日 時 平成 26 年 10 月 9 日（木）
- 2 場 所 宮城県仙台第二高等学校
- 3 授業者 下町 壽男
- 3 学 級 2 年 組（男子 人 女子 人 計 人）
- 4 教科書及び使用教材

- (1) 教科書 数学Ⅱ（東京書籍）
  - (2) ソフトウェア GRAPES/友田勝久
  - (3) デジタルコンテンツ Powers Of Ten / Eames Films
- 5 単元名 第 5 章 微分と積分 第 1 節 4 接線の方程式
  - 6 単元について（教材観）

### 【『微分』にもっと市民権を】

例えば、「ベクトル」という数学用語は、「考えるベクトルを同じにして」などというように、日常の中で市民権を得た言葉として、ある意味社会の中で定着しているといえる（もちろん、それが必ずしも数学で定義される概念と合致しているとは限らないが）。ところが、微積分については、言葉自体は社会の中で広く認知されているにもかかわらず、その意味や概念は残念ながら理解されているとは言い難い。むしろ「難しくて嫌なもの」の代名詞として使われることが多い。

「数学とは何か」という問いの答えの一つとして、「数学とは自然現象を支配する物理法則を調べる道具である」と述べることができる。そして、それを読み解く武器として微積分が果たす役割は非常に大きい。

であるから、我々は、もっとポジティブに日常の中で「微分」を語るべきである。そのためにも、微分法の誕生の歴史や、その概念の背景に潜むダイナミズムを示すことで、生徒の関心・意欲を喚起し、微積分の面白さや良さを伝えていくことが求められる。

### 【微分法の誕生】

微積分の誕生によって数学は、それまでの図形や方程式など静的な対象から、変化や、無限大、無限小という動的な対象を扱うものに変革した。微分法は 17 世紀後半にニュートン、ライプニッツによって構築された数学の一分野ではあるが、その萌芽として、歴史を遡って 4 つの段階を指摘してみたい。

1 つ目は、紀元前 5 世紀、古代ギリシャ時代のゼノンの「アキレスと亀」などに代表される有名なパラドクスである。これらは、それまでの正統的数学を逸脱し、「無限・運動・連続・変化・分割」といった、それこそ微分法によって説明されるべき概念が取り上げられていたため、当時の数学では解決することができなかった。

2 つ目は、紀元前 3 世紀のアルキメデスによる、取り尽くし法による円や球などの求

積や、円周率の近似などである。これはまさに積分の考えそのものともいえる。教科書では、微分からその逆演算として不定積分を登場させる流れになっているが、数学史的に見れば、積分が微分に先行していることがわかる。

3つ目は、15世紀中世ローマ時代である。この時代は科学の暗黒時代といわれるが、戦争の勝敗に影響を与える大砲の砲弾の研究が盛んに行われた。これによって、ある瞬間の運動の方向、つまり接線の方程式の研究が行われるきっかけが生まれた。

そして、4つ目は17世紀初頭のガリレイの望遠鏡、レーヴェンフックの顕微鏡の発明である。望遠鏡が無限大への世界の扉を開いたとすれば、顕微鏡が無限小の世界の扉を開き、微小変化量の分析というニュートンらの新しい数学の端緒となったともいえる。

特に、高校で初等数学を学び終える生徒たちには、このような微分誕生の歴史を伝えていくことは、教養ある市民を養成するためにも必要なことではなかろうか。

### 【微分とは何か】

微分とは、現象を分析する一つの方法である。一般に関数で表される現象に対して、「現在はこうである」「このままいくと」「将来はこうなるだろう」というのが、伴って変化する変数の関係を分析する一つの態度である。これを「微分」というキーワードを用いて述べると、「現在の状況」＝「初期値」、「このままいくと」＝微分方程式、「将来はこうなる」＝「微分方程式の解曲線」とまとめられる。「このままいくと」とは、小学校の比例における比例定数、中学校の一次関数であれば「直線の傾き」に対応する。そして、高校においては「接線の傾き」を表すものであろう。

微分とは曲線の接線を求めるための計算であり、局所比例法則によって関数の性質を分析することであるとまとめられる。これを、図形的に述べると、曲がりくねった（滑らかな）曲線も局所的にみると直線とみなすことができること、それによって、曲線の性質を分析するというのが微分法のエッセンスであると捉えることができる。

## 7 本時の目標

- (1) 接線の方程式の公式を用いてグラフ上の点における接線を求めることができること。
- (2) 接線の方程式を学ぶ意味を考えることで、微分とは何かを理解すること。

## 8 評価規準

観点	概ね満足できる(B)	努力を要する生徒への支援
関心・意欲・態度	微分概念がどのように芽生え発展したかに興味を示し、数学の楽しさや、良さを実感している。(観察・感想)	声かけや、エンカレッジする発問などを工夫する。
接線の方程式を求める技能	接線の方程式の公式を利用して、曲線上の点における接線の方程式を求めることができる。(ノート)	接点の座標、傾き、直線の方程式と分解してステップを踏んで解に辿りつけるように助言する。
微分や直線についての知識・理解	○微分概念を理解し、それを自分の言葉で表現しようとしている。(観察・ノート) ○既習事項の直線の方程式を理解している。	傾きと1点がわかる場合の直線の方程式が立ち戻る水源地であることを助言する。

## 9 本時の指導の構想

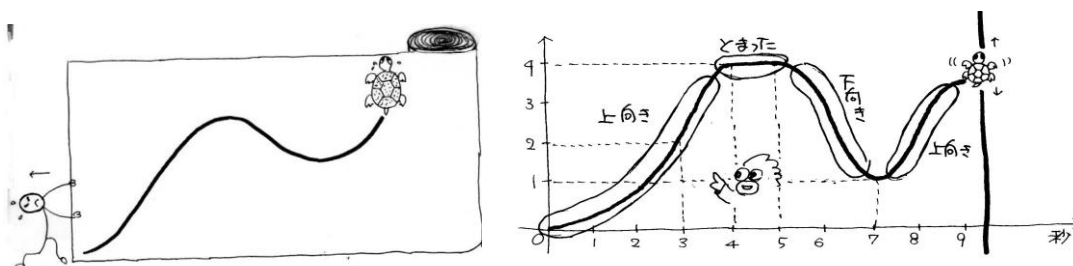
軽米高校から、以下のような要素を取り入れた授業を行ってほしいとの依頼があった。

- (1) 実験的な数学の授業
- (2) 教具を用いた授業
- (3) パソコンを用いた授業

上の要請にできるだけ応えられるようにという視点で構想を立てた。従って、様々な要素が総花的に詰め込まれた形にならざるを得ないこと、そして45分での実施は非常に厳しいものがあることを、まず了解して欲しい。

直線の方程式の公式を用いて、接線の方程式を求めることがゴールだが（知識・理解、技能）、それとともに、授業を通して、微分とは何かという問いに対し、一つのイメージが持てること、そしてそれを自分の言葉で表現することができるようにしたい（関心・意欲・態度、表現）。授業の展開は、大きく分けると次の3つの流れになる。

### ① 直線上を運動するカメの動きを分析する簡単な実験



これは、接線の求める動機づけとして行う。カメの描く曲線から、瞬間の速さと接線の傾きの関係に気づかせたい。

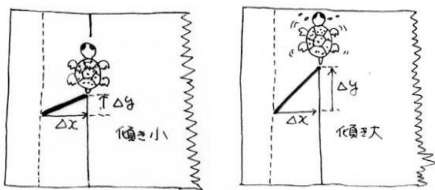
### ② 接線の方程式を求める教科書の問題演習

全員が接線の方程式を求めることができることを目指す。接線の方程式は、既習事項の  $y - y_1 = m(x - x_1)$  との関連で説明するだけでなく、局所的に、 $y - y_1$  と  $x - x_1$  が比例していて、その比例定数が  $f'(x_1)$  であると説明したい。その方が、本質的に微分、 $dy = f'(x)dx$  へとつながる考え方になる。また、局所拡大していく（視野を狭める）ことにより曲線は直線に見立てて考えることができることを、描画ソフト Grapes によって示す。

### ③ 微分の萌芽を含め、歴史的な背景について触れる。

紙芝居方式での説明や、Powers Of Ten のなどの動画コンテンツを利用することで興味を喚起する。更に時間があれば、微分の考えを活用して、表やグラフを読み解くことの説明も行う。

## 10 本時の展開

	学習内容及び学習活動	指導上の留意点と評価●
導入 15分	<p>1 本時の学習課題の提示</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>①接線の方程式の公式を用いてグラフ上の点における接線を求めることができること                  ②接線の方程式を学ぶ意味を考えることで、微分とは何かを知ることができること</p> </div> <p>・微分とは何かという発問を行い、生徒が微分に対して持っているイメージを把握する</p>	<p>・本時の授業の流れを説明し、見通しを持って授業に臨ませるよう留意する。</p>
	<p>2 直線運動するカメの動きを分析する</p> <p>2名の生徒をアシスタントにし、カメの軌跡を模造紙に描き、そこから何がわかるか考える。</p>  <p>・カメの速さ、運動の向きで軌跡はどのようになるか。                  ・カメの、ある瞬間の速さはどう考えればよいか。</p>	<p>●実験に積極的に参加している。                  (【関】観察)</p> <p>・接線の方程式にスムーズにつながるような流れを作る。</p>
展開 25分	<p>3 接線の方程式を求める</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>例題3 曲線 <math>y = x^2</math> の点(3,9)における接線の方程式を求めなさい。</p> <p>問10 曲線 <math>y = -x^2</math> 上の次の点における接線の方程式を求めなさい。                  (1) (2, -4) (2) (-1, -1)</p> <p>問11 曲線 <math>y = x^2 + 2x</math> 上の点(1,3)における接線の方程式を求めなさい。</p> </div> <p>・例題3は全体説明し、他の問題は自力解決させる。                  ・PC上で表現し、接線のイメージをつかませる。</p>	<p>・生徒の習熟にあわせ、基本問題と追加問題を準備し配布する。                  (授業でできなかったところは宿題)</p> <p>・接線の公式を何度も音読させながらその意味を把握させる。</p> <p>●傾きと接点の求め、接線の方程式を求めることができる。                  (【技】【知】ノート)</p>
	<p>4 微分とは何か(歴史的背景を見ながら)</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>①紙芝居仕立てで、歴史の中で微分がどのようにして生まれたかを説明。                  ②途中に、動画Power of Tenを見せる</p> </div>	<p>●微分のイメージを自分の言葉で記述できる。                  (【関】【知】プリント)</p> <p>●本時の感想を記述する。                  (【関】プリント)</p>
まとめ 5分	<p>5 学習のまとめ</p> <p>・接線の方程式を理解できたか。                  ・微分のイメージはどう変わったか。</p>	<p>・本時の授業の感想を述べさせる。                  ・時間があれば、ファイマンの言葉をビデオで紹介する。(数学とは…)</p>