数学科（数学Ⅰ）学習指導案

岩手県教育委員会学校教育室
主任指導主事　下町　壽男

□　実施日　平成 24 年 11 月 9 日（金）
□　実施校　岩手県立岩泉高等学校
□　授業者　下町壽男
（テキスト作成・編集　金濱千明）
□　クラス　３学年進学コース
□　単元名　数学Ｂ　平面ベクトル

１　学校・生徒の状況

岩泉高校は，平成21年度より「確かな学力の育成に係る実践的調査研究」の文部科学省の指定を受け，継続的に実践研究を行い，昨年度９月の高教研の研究大会や，２月に行われた総合教育センターにおける県の研究発表大会などでその取組の成果が発表された．

その取組の柱として，以下の２つをあげることができる．

①　授業冒頭における「確認テスト」と授業終末における「自己評価」の励行
②　授業の中に，生徒が言葉で論理的に説明を行うような言語活動を取り入れる

学力差が大きく，また，小中学校での既習事項の定着が十分でない生徒も多く入学している学校ではあるが，このような取組の中で，生徒の基礎学力の向上とともに，教師の授業改善や，教師集団の組織化が着実になされてきた．

今年度の個別訪問においても，数学科全体が，熊谷教諭を中心によくまとまり，自由に意見を言い合える明るい雰囲気が醸成されていることが窺えた．また，そのようなムードが生徒にも反映され，授業での反応の良さに繋がっていると思われた．

２　本時の授業のポリシー

今回は，ベクトルの概念と基本的な性質を踏まえるところから出発し，図形とベクトル方程式のつながりが理解できるような授業を目指す．１時間では，生徒の活動や定着を確保する時間を保証することは難しく，講義形式の授業中心にならざるを得ないが，生徒には，これまで学んだ内容につながりが意識できるようになることを期待したい．

尚，演習用テキストとして「数学ワンポイント講習ベクトルのまとめ」を配布するので，今後の指導に役立てていただきたい．（本時でも一部を扱う）

内積編，空間編についても同様に１時間ものの講座も考えているので，遠慮なく活用して欲しい．

８　教材観（平面ベクトル（内積なし））

ベクトルとは何か？という問いに対して，予想される答えは「矢印，有向線分」であろう．あるいは，「大きさと向きを持つような多次元量」というかもしれない．

最近，日常的な会話においても「ベクトルを揃えて」などという言葉をよく耳にする．それは「同じ方向性で」くらいの意味のように思う．であれば何もそこにベクトルを持ち出すほどではないとも思える．

ベクトルとは，単なる有向線分ではなく，そこに「加法・減法と実数倍」を定義することで初めて意味をなす．

そのような代数構造を入れることで，平面上の図形の性質が，数式によって表現されるわけである．

であれば，種々の問題演習を行う前に，２つの基底によって表される $s\vec{a}+t\vec{b}$ の性質を理解することで，図形と式を結びつけるためのイメージづくりができると思われる．

３　本時の授業の流れ（予想される展開）

●　ベクトルとは？

Ｔ：ベクトルとは何だろう？

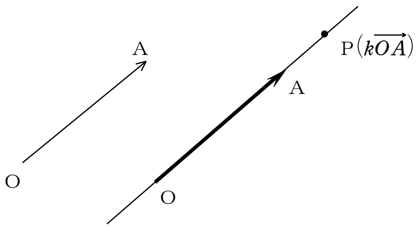
Ｓ：矢印．有向線分．

Ｔ：それだけではまだ「電池が入っていない」状態．そこに「加法，減法と実数倍」を定義することによって動き出す．

　ベクトルとは有向線分の全体に加法・減法・実数倍を定義した世界

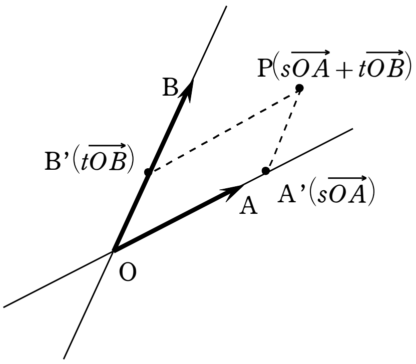
●　実数倍の世界

Ｔ：まずベクトルの実数倍について考える．



$\overrightarrow{OA}$ に対して，$k\overrightarrow{OA}$ の終点は，直線ＯＡ上の点となる．更に言うと，k がどんな値でも直線ＯＡの上しか動かないということ．

●　$s\vec{a}+t\vec{b}$　の世界

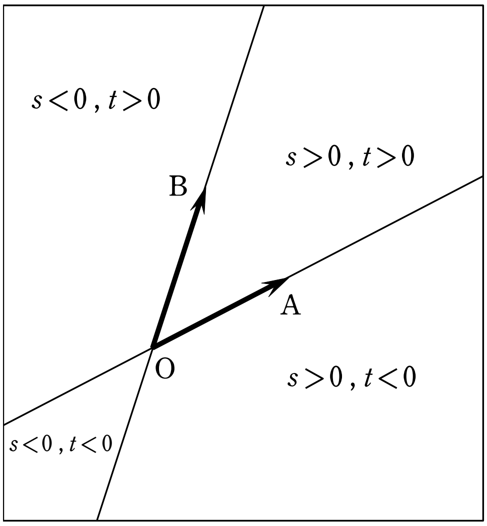


次に，$s\overrightarrow{OA}$ と$t\overrightarrow{OB}$ を考える．この２つのベクトルを加えると，その終点は，ＯＡ’とＯＢ’で作られる平行四辺形の頂点になる．
足すことによって，１つ上の次元への広がりが生まれる．

すると,$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表されるＰの世界は平面上の全ての点を表していることがいえる．

このとき，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を基底（BASE）と呼ぶ．

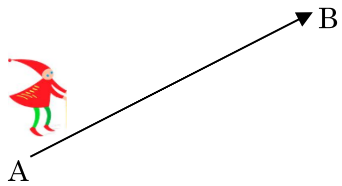
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の世界



●　位置ベクトル

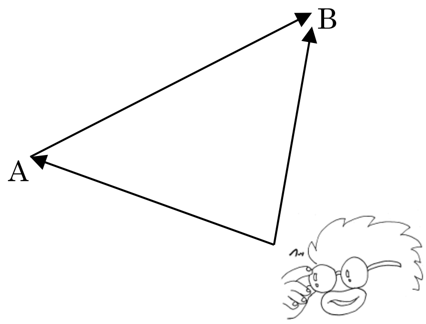
Ｔ：ＡからＢに向かう有向線分を考えるとき，そのイメージの仕方が２通りある．

①　自分が乗っているイメージ（小人の視点）



式で書くと　$\overrightarrow{AB}$　（小人の視点）

②　傍観者として眺めているイメージ



式で書くと　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

（小人の視点を，しもまっちの視点に変えた）

＜余談＞

例えば，リンゴ 3 個があって，そこに更に 2 個追加したならば，リンゴの総数は３＋２＝５個となる．これは集合の合併としての和である．

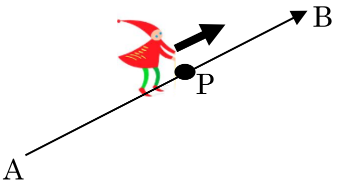
ところが，３時から２時間勉強した．何時まで勉強したか，といった場合の３＋２は別の意味を持つ．最初の３は時刻で，たされる２は時間の変化量（変位）である．３時から５時まで勉強した場合，その変位は５－３＝２時間となる．

変位とは，最後の状態から最初の状態の差によって表現される．

●　直線の方程式

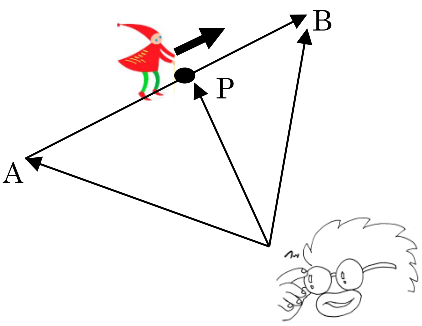
Ｔ：ベクトルは点と直線に関する勉強といってもよい．点や直線からなる図形を式で表現するために，直線のベクトル方程式をまとめておこう．

①自分が乗っているイメージ（小人の視点）



式で書くと　$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（小人の視点）

②　傍観者として眺めているイメージ



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

Oを始点として書き直す．

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$　……※1

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　……※2

ここで$s=1-t$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(s+t=1)$　…※3

【※１：着地して這い回る】

※１は，O からまず A に着地して，そこから $\overrightarrow{AB}$ の方向（逆方向も）に這い回るというイメージである．A を新幹線の駅，$t\overrightarrow{AB}$ を新幹線の鉄道と考えてみても良い．

一般に，このタイプの直線のベクトル方程式は，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$　（$\vec{a}$の終点を通り，$\vec{u}$の方向を持つ直線）と表される．

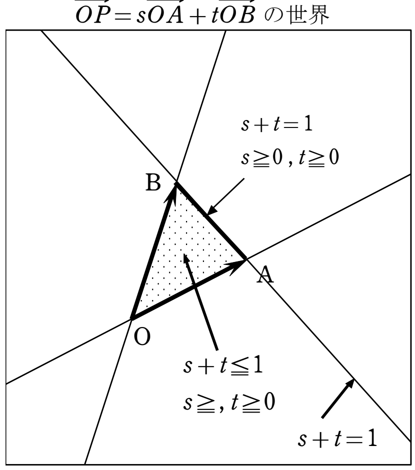
【※２：分点の位置】

※２は，線分 AB をｔ：１－ｔの比に内分する点のイメージである．交点のベクトルを求める場合に非常によく用いられる形でもある．

【※３：一般的な形】

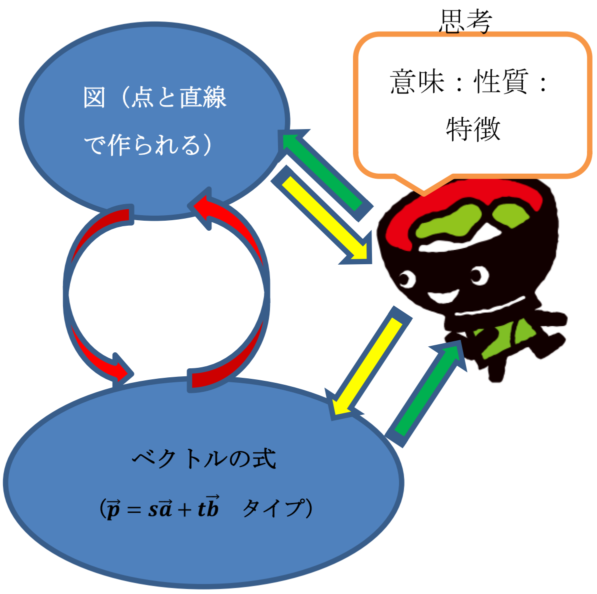
※３の形にすると，$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の係数の和が１になるところを基準にそれより遠い方の点と近い方の点を識別して考えることができ便利である．

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の世界

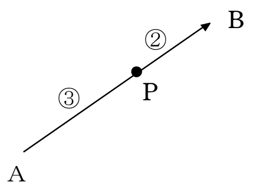


●　いくつかの問題

T：ここまでの部分に関する問題演習をしていこう．大切なことは＜図の世界＞と＜ベクトル方程式の世界＞を行ったり来たりできるようになることである．



【レベル１】図→式

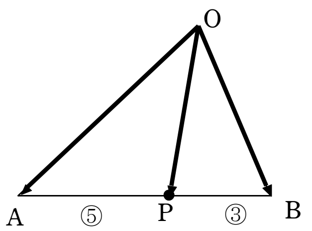


$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AB}$ の関係を式で示せ

【レベル１】式→図

$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$ のとき，線分上にA､B,Pの位置関係を図示せよ．

【レベル２】図→式



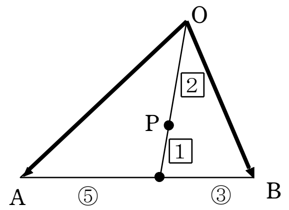
$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ

【レベル２】式→図

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$

O,A,B,Pの位置関係を図示せよ

【レベル３】図→式



$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ

【レベル３】式→図

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{11}\overrightarrow{OB}$

O,A,B,Pの位置関係を図示せよ

【レベル４】式→図

（テキスト 4 ページ［例題］　始点の読み替え）

△ABC と点 P がある．

$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　を満たすとき，

P の位置が分かるように図示せよ．

また，△PBC：△PCA：△PAB を求めよ．

【レベル５】式→図

（テキスト 7 ページ［例題］　存在範囲）

平行四辺形 OABC 内（周も含む）の同点 P が $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　で与えられている．

(1)　$5s+2t=3$　のとき P の存在範囲を図示せよ．

(2)　$5s+2t\leqq 3$　のとき P の存在範囲を図示せよ．

【レベル６】図→式

（テキスト 5 ページ［例題］　交点の位置）

三角形 OAB において，辺 AB の中点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，線分 OC と線分 AD の交点を E とする．

$\overrightarrow{OE}$　を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$　で表せ．