線形微分方程式と漸化式の解法　その１

八戸西高　下町壽男

漸化式　$a_{n+1}=3a_n+2^n$　$(a_1=3)$　※　を例にあげて，いろいろな解法を試みた上で，最終的に線形微分方程式と漸化式から一般項を導く解法の関係を論じよう．

【その１　両辺を 2^{n+1} で割る】

※の両辺を2^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$　（特性方程式型漸化式に帰着）

この式を変形して

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

よって，$\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{5}{2}$ 公比$\dfrac{3}{2}$ の等比数列なので

$$b_n+1=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore b_n=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$$

よってa_nを求めると　$a_n=5\cdot3^{n-1}-2^n$　答

【その２　両辺を 3^{n+1} で割る】

※の両辺を3^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$　（階差数列型漸化式に帰着）

よって，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$　$(n\geqq2)$

$$b_n=1+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$　（$n=1$ のときも成立）

よってa_nを求めると　$a_n=5\cdot3^{n-1}-2^n$　答

【その３　項上げをして，2倍したものとの差分をとる】

$$
\begin{array}{r}
a_{n+2}=3a_{n+1}+2^{n+1} \\
2a_{n+1}=6a_n+2^{n+1} \\
\hline
a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)
\end{array}
$$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項$a_2-2a_1=11-6=5$ 公比3の等比数列なので

$a_{n+1}-2a_n=5\cdot 3^{n-1}$

※より　$3a_n+2^n-2a_n=5\cdot 3^{n-1}$

よって　$a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^n$　答

その３の解法は，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$　すなわち

漸化式　$a_{n+1}=3a_n+2^n$　は　$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$という隣接3項間漸化式に帰着することがわかる．このことから次のような解法も考えられる．

【その４　隣接３項間漸化式の一般解を用いる】

漸化式 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$を満たす一般項$\{a_n\}$は線形空間（自由度２）をなす．

視察より　$a_n=r^n$ が特殊解であると考えると

$r^{n+2}-5r^{n+1}+6r^n=0$　すなわち　$r^2-5r+6=0$　$\therefore r=2\,,3$

よって一般解は，$a_n=k\,2^{n-1}+l\,3^{n-1}$

境界条件　$a_1=3\,,a_2=11$　より $k=-2, l=5$

よって，$a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^n$　答

これは，2階の同次線形微分方程式を解く手法と同じである．であるならば，次のように非同次線形微分方程式を解くアナロジーで考えることもできる．

【その５　非同次線形微分方程式の解法のアナロジー】

$a_{n+1}=3a_n+2^n$　において同次型　$a_{n+1}=3a_n$ の一般解は $a_n=k\,3^{n-1}$

また,視察により　$a_{n+1}=3a_n+2^n$　解を $a_n'=l\,2^n$ と推察し漸化式に代入すると

$l\,2^{n+1}=(3l+1)\,2^n$　より $l=-1$ を得るので，特殊解　$a_n'=-2^n$が得られる．

よって，$a_n=k\,3^{n-1}-2^n$　これと $a_1=3$ より$k=5$ を得る．

この方法は便利で素早く解を求めることができる．いくつか応用例をやってみる．

例１　$a_{n+1}=2a_n+3$　$(a_1=1)$

解答　同次型　$a_{n+1}=2a_n$の一般解は $a_n=k\,2^{n-1}$

また，視察により　$a_n'=l$ として漸化式に代入すると $l=-3$

よって，$a_n=k\,2^{n-1}-3$　$a_1=1$ より　$k=4$　$\therefore a_n=2^{n+1}-3$　答

例２　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n+1$　$a_1=1\,,a_2=2$

解答　同次型　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$　の一般解は　$a_n=k\,2^{n-1}+l$

また，$a_n'=an+b$ として漸化式に代入すると　$a=-1$　$\therefore\ a_n'=-n$

$a_n=k\,2^{n-1}-n+l$ と　$a_1=1\,,a_2=2$より $k=2\,,l=0$

よって　$a_n=2^n-n$　答

線形微分方程式と漸化式の解法　その２

八戸西高校　下町壽男

その１では，$a_{n+1}=p\,a_n+r^n$　型の漸化式を線形非同次微分方程式の解法のアナロジーで考える試みを行った．以下に解法をまとめてみる．

【$a_{n+1}=p\,a_n+r^n$ 型　漸化式の解法】

１　同次型漸化式　$a_{n+1}=p\,a_n$ の一般解を見つける．（X_n とおく）

２　$a_{n+1}=p\,a_n+r^n$ の特殊解の一般項を見つける．（u_n とおく）

３　求める解は　$a_n=X_n+u_n$　となり初期条件からX_n の未定係数を決定する．

略証

$a_{n+1}=X_{n+1}+u_{n+1}=p\,X_n+(pu_n+r^n)=p(X_n+u_n)+r^n=pa_n+r^n$

つまり，漸化式を満たす$\{a_n\}$ の解空間を考えると，$\{X_n\}$ が自由度１のベクトル空間（別の言い方をすれば，１つの基底によって作られる主イデアル整域）であり，それらをu_n だけ付加した（ベクトルを付け加えて引き延ばしたというイメージ）解空間が$\{a_n\}$ になるということである．

さて，そこで問題なのは，特殊解 u_n の求め方である．

同次型の一般解　X_nは，$X_n=kp^n$ （実際は kp^{n-1} とした方が係数の決定が楽）

であるが，果たして，$u_n=l\,r^n$ としてよいのだろうか.

以下に，u_n の決定について述べておく．

$u_n=l\,r^n$ とおいて漸化式に代入すると

$l\,r^{n+1}=pl\,r^n+r^n$

$lr(r^n)=(pl+1)r^n$

よって，$lr=pl+1$

ここで，$p\fallingdotseq r$ のとき，l が決定されるので，$u_n=l\,r^n$ とおくことができるが，

$p=r$ のときはl が決定されない．すなわち特殊解は lr^n となり得ない．

では，$p=r$ の場合の特殊解の決定について調べてみよう．

$a_{n+1}=ra_n+r^n$　とする．

まずこれを普通に解いてみよう．

両辺を r^{n+1} で割って

$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\dfrac{a_n}{r^n}+\dfrac{1}{r}$　ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{r^n}$ とすると

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{r}$

よって b_n は初項 b_1 公差 $\dfrac{1}{r}$ の等差数列であるので，b_n は

$b_n = an + b$ という1次式で表すことができる．

よって a_n は，　$a_n = (an+b)r^n = C_1 r^n + C_2 n r^n$　と表現される．

すなわち，特殊解は $u_n = l\,nr^n$ であることがわかる．

別のアプローチを行ってみよう．

$a_{n+1} = ra_n + r^n$ において，項上げした式と，r 倍した式の差分を考えると

$$\begin{array}{r} a_{n+2} = ra_{n+1} + r^{n+1} \\ ra_{n+1} = r^2 a_n + r^{n+1} \\ \hline a_{n+2} - ra_{n+1} = r(a_{n+1} - ra_n) \end{array}$$

よって，隣接3項間漸化式　$a_{n+2} = 2ra_{n+1} - r^2 a_n$　とおける．

この漸化式の特性方程式は　$x^2 - 2rx + r^2 = 0$　となり，重解を持つタイプであることがわかる．

この場合は，解は，r^n と nr^n を基底とする線形空間をなすことになる．

最後に同次線形2階微分方程式と漸化式の解法を比較しておこう．

例1　$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ （$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$） 特性方程式は $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2, 3$ 解は $2^n, 3^n$ を基底として $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$	例1’　$y'' = 5y' - 6y$ 特性方程式は　$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2, 3$ 解は　e^{2x}, e^{3x} を基底として $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
例2　$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ （$a_{n+1} = 3a_n + 3^n$） 特性方程式は $x^2 - 6x + 9 = 0$ $x = 3$（重解） 解は 3^n と $n\,3^n$ を基底として $a_n = C_1 3^n + C_2\, n\, 3^n$	例2’　$y'' = 6y' - 9y$ 特性方程式は $x^2 - 6x + 9 = 0$ $x = 3$（重解） 解は e^{3x} と $x\,e^{3x}$ を基底として $y = C_1 e^{3x} + C_2\, x e^{3x}$

次回予告　$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + f(n)$ 型漸化式の特殊解の決定について

～2階線形非同次微分方程式の定数変化法のアナロジー～

（2011年　1月15日　センター試験会場にて）