ICME 9
TOKYO/MAKUHARI 2000
Japan Society of Mathematical Education
Private Postbox No.18, Koishikawa Post Office, Tokyo 112 Japan/phone(03)3946-2267/fax(03)3946-3736

(30)

テーマ：2変数関数のテーラー展開

＝大学数学へのかけ橋＝
Visual 版 ③

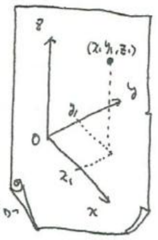
＝テーマ＝
『2変数関数のテイラー展開』

(復習) 1変数関数のマクローリン展開

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1}$$

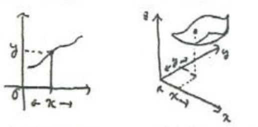
2変数関数 $z = f(x, y)$ のマクローリン展開を考えよう!!

$z = f(x, y)$
x, y：独立変数
z：x, yの値によって決まる値



※ x, yが決まればそれに応じて、zが決定
↳ ということは、$z = f(x, y)$ は、空間における平面を表すのです。

$y = f(x)$　　$z = f(x, y)$



独立変数 x に対して y が決定。x が変化することで曲線ができる。
独立変数 x, y に対して z が決定。x, y が変化することで曲面ができる。

◎ $z = f(x, y)$ の、x, y をパラメータ t を用いて

$$\begin{cases} x = ht \\ y = kt \end{cases}$$ とおくと。 ―(☆)

$z = f(ht, kt)$ ⇒ $z = z(t)$
↑ z は t の1変数関数と見なすことができる!!

このことから、z のマクローリン展開は、

$$z(t) = z(0) + \frac{1}{1!}z'(0)t + \frac{1}{2!}z''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^{(n)}(0)t^n + R_{n+1}$$ ―(*)

◎ $z'(t)$, $z''(t)$ … を求める。

$$\boxed{dz = f_x\,dx + f_y\,dy}$$ ⇒ 全微分
↑ これを用いる。

$$\frac{dz}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt}$$
$$= f_x\frac{d(ht)}{dt} + f_y\frac{d(kt)}{dt}$$
$$\therefore \frac{dz}{dt} = hf_x + kf_y$$
できた♪

これを次の様に表します。
$$\frac{dz}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f$$
↑ 微分演算子（作用素）

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f$$
$$= \frac{df}{dt}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
($\frac{df}{dt}$：$\frac{dz}{dt}$のこと)
$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$
$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot f$$
↑ と表現するが、実は、

$(hf_x + kf_y)^2$
$= h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$
のことです。

以下同様にして、

$$\frac{d^3z}{dt^3} = (hf_x + kf_y)^3 f,\quad \frac{d^4z}{dt^4} = (hf_x + kf_y)^4 f \quad \cdots\cdots$$

つまり $$\boxed{\frac{d^nz}{dt^n} = (hf_x + kf_y)^n f}$$ と表される!! ―(*)(*)

(*), (*)(*)から、2変数関数 $z = f(x, y)$ のマクローリン展開は次の様に考えていきます。

まず (*)において、$t = 1$ とすると、

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{1!}z'(0) + \frac{1}{2!}z''(0) + \frac{1}{3!}z'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}z^{(n)}(0) + R_{n+1}$$

$t = 1$のとき、$x = h$, $y = k$ なので

$$f(x, y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}(xf_x + yf_y)f(0,0) + \frac{1}{2!}(xf_x + yf_y)^2 f(0,0) + \frac{1}{3!}(xf_x + yf_y)^3 f(0,0) + \cdots + \frac{1}{n!}(xf_x + yf_y)^n f(0,0) + R_{n+1}$$

なんと、できてしまった!!

これが (0,0) のまわりでの展開なので、
(a,b)のまわりでの展開は、(☆)において、$\begin{cases} x = a + ht \\ y = b + kt \end{cases}$ とおけばよい

よって、$z = f(x, y)$ の点 (a, b) のまわりでのテイラー展開は

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{1!}(hf_x + kf_y)f(a,b) + \frac{1}{2!}(hf_x + kf_y)^2 f(a,b) + \frac{1}{3!}(hf_x + kf_y)^3 f(a,b) + \cdots + \frac{1}{n!}(hf_x + kf_y)^n f(a,b) + R_{n+1}$$