全微分可能とは①

K君はT北大学のAO入試で合格し、大学から与えられた課題（大学初年級）にせっせと取り組んでいる。何かと面白い話題やら、わからなかったことやらを話しにくるのである。そんな中からの一こまを紹介する。

K：先生。全微分可能の定義なんですが、次のような記述がありました。

$$f(p+h\,,q+k)-f(p\,,q)=h\,f_x(p\,,q)+k\,f_y(p\,,q)+\varepsilon(p\,,q)$$ において

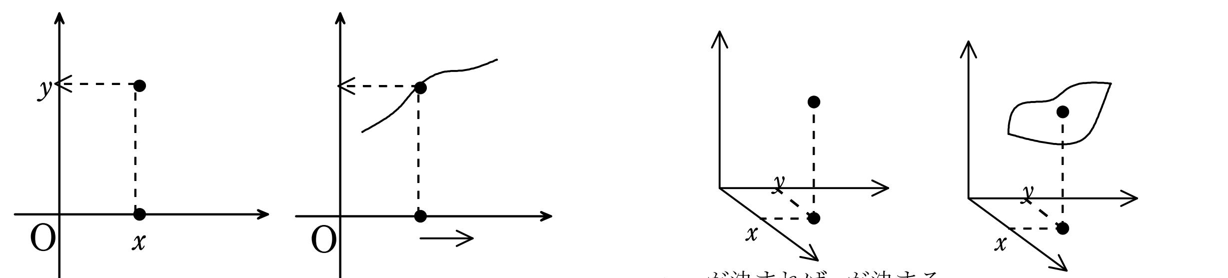
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$ のとき、$z=f(x,y)$ は $(p\,,q)$ で全微分可能

この中の、$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ の意味がイメージしにくいのですが。

T：うわあ。もう全微分にはいっちゃったんだ。凄いなあ。どれどれ。じゃあ一緒に考えてみよう。まず、高校では１変数の関数だけをあつかってきましたが、大学では２変数以上の関数も扱います。

高校では、$y=f(x)$、つまり、独立変数が x で、それに対応して y が決まる。

それが、２変数では、$z=f(x\,,y)$ という形、つまり独立変数 x , y に対応して、z が決定するということです。



xが決まればyが決まる　xを変化させて曲線ができる　x,yが決まればzが決まる　x,yを変化させて曲面ができる

K：図形的には、$y=f(x)$ は xy 平面上の曲線を表すのに対して、$z=f(x\,,y)$ は、xyz平面上のある曲面を表す式と考えるのですね。

T：そう。次元が１つ上がるのです。

整理してみると

$y=f(x)$	→	$z=f(x,y)$
平面上の曲線の方程式	→	空間上曲面の方程式
微小部分は直線で近似	→	微小部分は平面で近似
x 軸と曲線で囲まれた面積を考える	→	xy 平面と曲面で囲まれた体積を考える

という対応です。レベルがワンランク上がるのですが、平面で行なった考えがそのまま保存されます。つまり、きちんと平面上での考えが理解されていれば、3次元でも難しいことはないと思います。では、まず1変数から復習してみましょう。

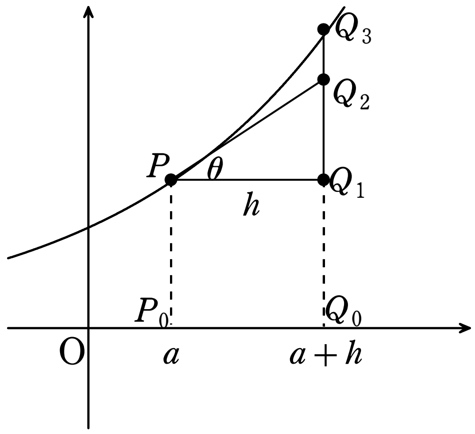
$y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能とはどういうことでした？

K：$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定値を持つということです。

T：そうですね。ここで、$f'(a)$ の図形的意味は？

K：$x=a$ における接線の傾きです。

T：そうです。では、図を見てください。



まず、Q_1Q_3 の長さは、$f(a+h)-f(a)$

また、$Q_1Q_2=h\,tan\theta$ で、$tan\theta$ は接線の傾き

ですから、$tan\theta=f'(a)$ です。つまり、

$Q_1Q_2=h\,f'(a)$　ですね。

さて、ここで、$Q_1Q_3=Q_1Q_2+Q_2Q_3$ なので、

$Q_2Q_3=\varepsilon$ とすると、

$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\varepsilon$　が成り立ちます。両辺を h で割れば、

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\frac{\varepsilon}{h}$$

つまり、$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が成り立つということは、

$h\longrightarrow 0$ としたとき、$\dfrac{\varepsilon}{h}$ が０に行くということが微分可能の図形的解釈です。

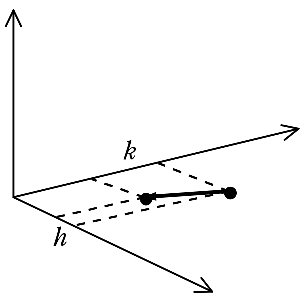
K：なるほど。つまり、Q_0を P_0 に近づけるとき、それよりずっと急速にQ_3 はQ_2 に近づくということですね。

T：そうです。それはイメージ的にいうと、「P において微分可能とは P の近傍を直線（接線PQ_2）に見立てることができる」ということになります。

このことを「まるい地球もすむときゃ平ら」の原理といった人がいます。面白いですね。このことを踏まえて、最初の式を考えてみるとイメージしやすいでしょう。

K：なるほど。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ の意味が見えてきました。

つまり、平面の場合は、Q_0を P_0 にx 軸上の直線に沿って近づけていくのに対して、3次元の場合は、図のように対角線に沿って近づけていくカンジですね。



T：そうです。そのとき、誤差の項 $\varepsilon(p\,,q)$ がQ_0P_0 よりも急速に０に近づく。つまり、その点の近傍で平面に見立てることができるというわけです。

全微分可能とは②

$f(p+h\,,q+k)-f(p\,,q)=h\,f_x(p\,,q)\,+k\,f_y(p\ ,q)+\varepsilon(p\,,q)$　において

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ のとき、$z=f(x,y)$ は $(p\,,q)$ で全微分可能

T：前回は上の定義の説明の前に、1変数の関数での微分可能について話をしました。

K：1変数関数において、ある点で微分可能というのは、その点の近傍を接線の方程式に見立てることができるというイメージでしたね。

T：そうです。で、今回はいよいよ２変数関数での微分可能性なわけですが、ここでは接平面が登場します。ところが、高校では残念なことに平面の方程式はやっておりませんので、まずは、最初に平面の方程式の説明からしていきたいと思います。

【平面の方程式】

T：まず、直線の方程式の復習から入りましょう。

$A(x_1\,,y_1)$ を通り、$\vec{u}=(p\,,q)$ に平行な直線はどうなりますか。

K：直線上の任意の点を P として、ベクトル方程式でかけば、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\vec{u}$

成分で表すと、$(x\,,y)=(x_1,y_1)+t(p,q)$

パラメータ表示で表すと、$\begin{cases}x=x_1+tp\\ y=y_1+tq\end{cases}$

更に、パラメータを消去すると

$\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=t$　($p,q\fallingdotseq 0$のとき)

T：そうですね。このようにベクトルを使えば、空間における直線の方程式も同様に求めることができますね。

ではもう一つ。今度は、$A(x_1\,,y_1)$ を通り、$\vec{u}=(p\,,q)$ に垂直な直線はどう表せばよいでしょう。

K：内積＝０ですね。直線上の任意の点を P とすると、$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$ ですね。

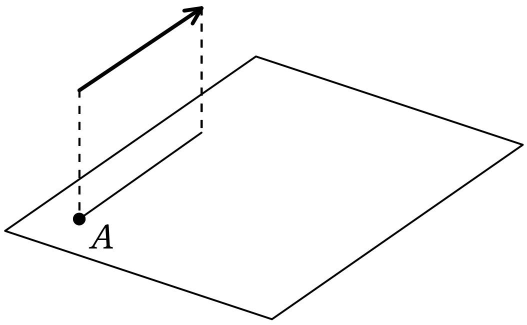
成分表示すると、$p(x-x_1)+q(y-y_1)=0$ となります。

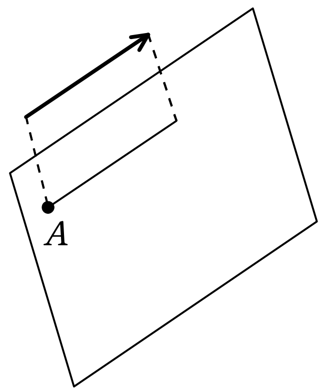
T：では、いよいよ平面の方程式を求めます。

今２通りの方法で直線の方程式を求めましたが、そのどちらかの考えを利用します。

K：例えば、$A(x_1\,,y_1,z_1)$ を通り、$\vec{u}=(p\,,q\,,r)$ に平行な平面と考えれば…

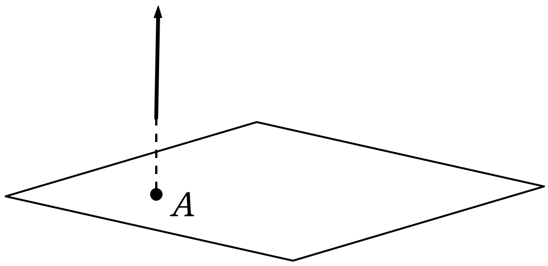
ええと。これはだめですね。平面がただ一つに決まりません。





T：そうですね。では後の方の方法ではどうなりますか？

K：$A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、$\vec{u}=(p, q, r)$ に垂直な直線ですね。あっこれはただ一つに決まります。そうか。こうやって平面の方程式を求めるんですね。



求めると、$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$ から、$p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)=0$

T：これを、$A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、法線ベクトルが $\vec{u}=(p, q, r)$ である平面の方程式といいます。

一般に、この式のカッコをはずすと、$ax+by+cy+d=0$ とかけます。

これが平面の方程式の一般形です。

さあ、これで準備完了。いよいよ全微分可能についての説明に入りましょう。

あっそうだ。その前に偏微分は大丈夫ですか。

K：大丈夫です。x, y で表された関数に対して、微分する1つの文字以外をすべて定数と見るという方法ですね。例えば $z=x^2+x^3y^2$ なら、x で偏微分すると、

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y^2x^2$　　　また、y で偏微分すると、$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y$ ですね。

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_y$ と書くのでした。

T：偏微分の図形的な意味はどうですか？

K：例えば、y を定数に見るということは、ある曲面に対して、xz平面に平行な平面で切ったときにできる曲線の接線というイメージです。

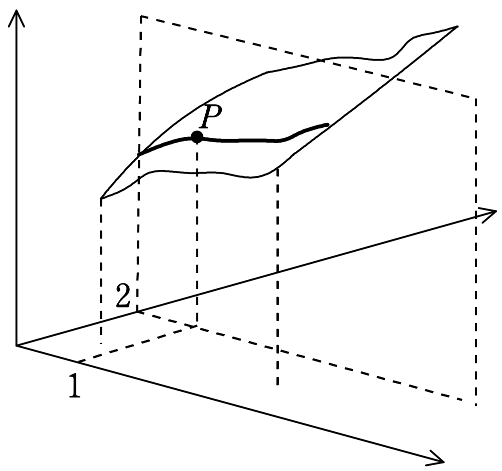
T：そんなカンジですね。ちょっと図示してみましょう。

全微分可能とは③

$f(p+h\,,q+k)-f(p\,,q)=h\,f_x(p\,,q)\;+k\,f_y(p\;\,,q)+\varepsilon(p\,,q)$　において

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ のとき、$z=f(x,y)$ は$(p\,,q)$ で全微分可能

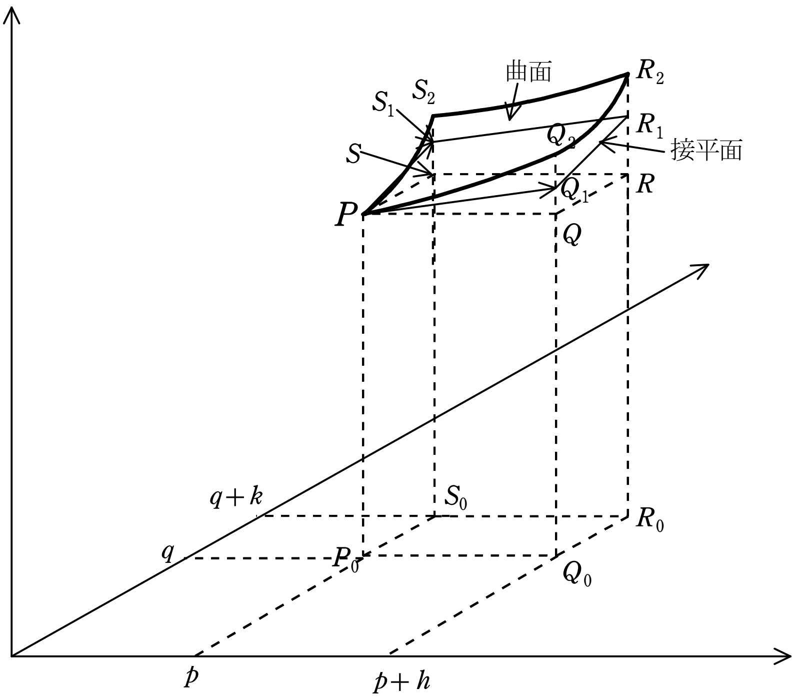
T：では偏微分のイメージ図を描いてみます。



図のような　$z=f(x,y)$ で表される曲面があったとします。

このとき、x で偏微分するということは、y を定数と見るということです。それは、左図のように、xz 平面と平行な平面で切って、その切り口に表された曲線を微分したということになります。例えば、図のように$y=2$とすれば、図の太線の関数は、$z=f(x\,,2)$ という、xz 平面上の２変数関数になるわけですね。ですから、図において、$f_x(1,2)$ というのは、曲線 $z=f(x\,,2)$ の、点Pにおける接線の傾きというわけです。

いよいよ、上の問題、全微分可能性について説明します。



この図が命です。$P(p\,,q\,,f(p,q))$ において全微分可能とはどういうことでしょうか。
P における接平面 $PQ_1R_1S_1$ の方程式を次の手順で求めます。
まず、直線 PQ_1の方程式は、曲面を平面 PP_0Q_0Q で切った曲線 PQ_2 のP における接

線の方程式なので、

$z=f_x(p,q)(x-p)+f(p,q)$ とおけます。…①

また、直線 PS_1の方程式は、曲面を平面 PP_0S_0S で切った曲線 PS_2 のP における接線の方程式なので、

$z=f_y(p,q)(y-q)+f(p,q)$ とおけます。…②

さて、ここで、平面 $PQ_1R_1S_1$ の方程式を、

$a(x-p)+b(y-q)+(z-r)=0$ （$r=f(p,q)$）とおくと、

$y=q$ のとき、$a(x-p)+z-r=0$

これが①と一致するので、$a=-f_x(p,q)$

$x=p$ のとき、$b(y-q)+z-r=0$

これが②と一致するので、$b=-f_x(p,q)$

以上から平面 $PQ_1R_1S_1$ の方程式は、

$z-f(p,q)=f_x(p,q)(x-p)+f_y(p,q)(y-q)$ と求まりました。

この式において、$x=p+h$, $q=q+k$ とすると、

$z-f(p,q)=f_x(p,q)\,h+f_y(p,q)\,k$ となります。

$z=f(x,y)$ なので、

$f(p+h,q+k)-f(p,q)=f_x(p,q)\,h+f_y(p,q)\,k$

K：長かったけれど、ついに、上記の式にたどり着きましたね。

T：全微分可能の定義の式は、

$f(p+h,q+k)-f(p,q)=h\,f_x(p,q)+k\,f_y(p,q)+\varepsilon(p,q)$ において

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ のとき、$z=f(x,y)$ は(p,q) で全微分可能

ここで、左辺は RR_2 、右辺の $h\,f_x(p,q)=QQ_1$、$k\,f_y(p,q)=SS_1$

そして、$\varepsilon(p,q)=R_1R_2$ であることに注意して下さい。

K：そして、$\sqrt{h^2+k^2}=P_0R_0$ ですね。

そうか。わかりました。R_0 をP_0 に限りなく近づけるとき、その距離よりもずっと早く、R_1R_2 が 0 に近づく。そして $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(p,q)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ となるとき全微分可能という。

つまり点P の近傍での曲面を接平面にみなすことができるというのが全微分可能ということなんですね。１変数で考えたことの自然な拡張になっていますね。

T：そうですね。そして、上のことから、

$\triangle z=\triangle x\,f_x+\triangle y\,f_y$ となり、これをいたるところで規則化して

$dz=f_xdx+f_ydy$ という全微分が得られます。

K：全微分とは一言で言うと「z の増分の規則」ということなんですね。

2002年　しもまっち