フーリエ級数の入り口の入り口

(1)　自然数 m , n に対して、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)　n を自然数とするとき、$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$ の値を求めよ。

(3)　n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して、

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \{x - (a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx)\}^2 \, dx$$

とおく。I_n を最小にするような a_k の値を求めよ。　　(横浜国立大)

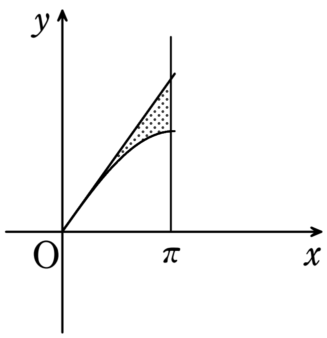
Ｔ：まずこの問題の意図を考えましょう。(3)のI_n の式がポイントです。これは何をいっているのでしょうか。

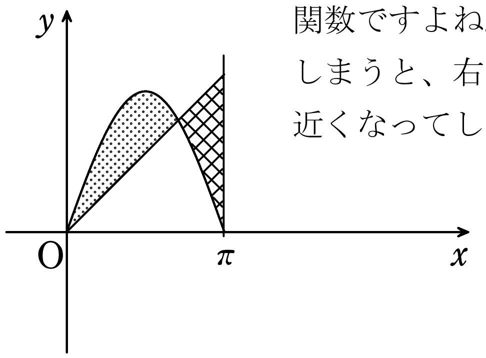
Ｓ：２つの関数、$y_1 = x$ と、$y_2 = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_n \sin nx$ との差の２乗を$-\pi$から π まで積分しているんですね。

Ｔ：そうです。２つの関数の差というのは、２つの関数の値の違いということですね。I_n の最小値を求めるということは、y_1 との誤差を最小とするとような y_2 を求めよという問題なのです。

Ｓ：誤差を考えるんだったら、単に差をとって積分するんじゃだめなのですか。

Ｔ：それだと意味がなくなります。例えば下の左図と右図では、左の方が誤差が少ない関数ですよね。ところが、単に積分してしまうと、右図の方の積分の方が０に近くなってしまいます。





Ｓ：そうか。上側の面積と下側の面積でプラスマイナスの関係がでてくるんですね。

Ｔ：もっと身近な例で説明しましょう。ある２つのグループに数学のテストを実施したところ次のような得点になりました。どちらのグループの平均点も50点でした。

		平均との差	(平均との差)^2
A	0	-50	2500
B	20	-30	900
C	80	$+30$	900
D	100	$+50$	2500
E	50	0	0

		平均との差	(平均との差)^2
F	50	0	0
G	51	1	1
H	50	0	0
I	50	0	0
J	49	-1	1

このときどちらのグループの方が、平均からの隔たりが小さいと考えられますか。

Ｓ：どちらのグループも、平均との差を考えれば０なのですが、明らかに、左のグループの方が平均からの変動が大きいですね。それを示すには(平均との差)^{2}を考えなければならないわけですね。

Ｔ：そうです。平均からの差の２乗を平均したもの、つまり一人当たりの平均からの隔たりの２乗を「分散」といいました。

Ｓ：ちょっと待ってください。単に差を考えるのはだめなことはわかりましたが、じゃあ差の絶対値をとったほうが簡単ではないですか。

Ｔ：それでもいいのですが、絶対値のついた関数は「微分•積分ができない」という致命的な問題があるのです。私たちはいろいろな自然現象や社会現象を解析するとき、微分積分という数学的な方法を駆使します。そのために絶対値がついた式を回避するというわけです。

Ｓ：なるほど。するとこの問題の意図は、$y_1=x$ に最も近くなるような関数、$y_2=a_1 sin\, x+a_2 sin\, 2x+a_3 sin\, 3x+\cdots+a_n sin\, nx$　を決定するという問題なのですね。

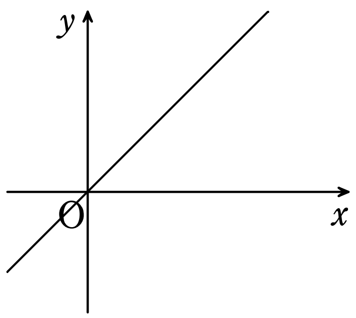
Ｔ：そうです。これを「最良近似定理」といいます。これは非常に重要な問題で、つまり、

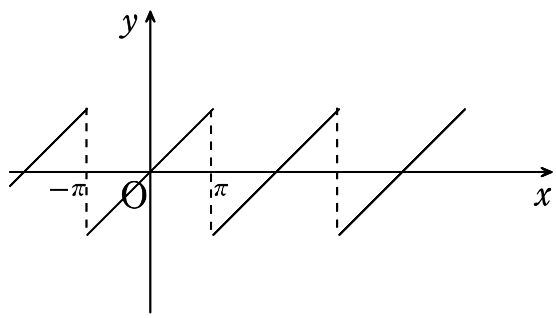
$y=x$ という直線の方程式を　三角関数で近似しよう

という発想なわけです。

Ｓ：そんなことができるのでしょうか。

Ｔ：まず一つは、$-\pi$から π までという限定があるということ。つまり$-\pi$から π までの周期関数として $y=x$ を考えるということです。つまりここで近似しようとしている関数は図の左のような$y=x$ ではなく、右のような周期関数としての $y=x$ です。





そして、第二には、$y=x$ とぴったり一致するように三角関数で表現することは不可能ですが、無限級数で関数を表現することにより、その誤差をいくらでも０に近くすることは可能です。これは後でパソコンを使って様子を見ることにしましょう。
では、問題にとりかかってみましょう。

Ｓ：問題を解く前に質問があるんですが。この問題の意味は、$y=x$ という関数を、$-\pi$からπまでの間で三角関数で表現するということですよね。

Ｔ：そうです。このように任意の関数を$-\pi$からπまでの周期関数として、三角関数の無限級数の形で表現しようという考えを、フーリエ級数といいます。

前に少し話したことがあるかもしれませんが、任意の関数を整関数の級数であらわそうという考えをテイラー展開といいましたが、それの三角関数版といってもいいでしょう。

Ｓ：そこで質問なのですが、なぜ、この問題は、サインだけなのでしょうか。コサインは無いのですか。

Ｔ：ああ。いいところをつきましたね。実はフーリエ級数は次の式で表現されます。

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\ nx + b_n sin\ nx)}$$

＝としないで～としていますので注意してください。つまり、$f(x)$ は、定数項と、サインの項とコサインの項に分かれます。ここで、a_n をフーリエコサイン係数、b_n をフーリエサイン係数といいます。

さて、今あなたが質問したようにこの問題では、すべてサインで表されています。つまり、この問題の場合は、コサインの項は必要ないということ、つまりフーリエコサイン係数がすべて０ということなのです。

Ｓ：なるほどそういうことですか。

Ｔ：ですから最初からI_nを、　$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ x - a_0 - \sum_{k=1}^{n} (a_k cos\ kx + b_k sin\ kx) \right\}^2 dx$ とおいてその最小値を考えてもいいのですが、それだとかなり積分計算というか、カッコをはずす作業が大変になるので、とても入試問題として出題することができないわけですね。だから、最初からサイン係数だけを考えるようにしているんです。

Ｓ：では解いていきます。(1)(2)は何回も演習でやったことがあります。

(1)　まず、$sin\ mx\ sin\ nx$ は偶関数なので、

$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ mx\ sin\ nx\ dx = 2\int_{0}^{\pi} sin\ mx\ sin\ nx\ dx$　がいえます。

次に積和公式を利用するのでした。

$$sin\ mx sin\ nx = -\frac{1}{2}\{cos(m+n)x - cos\ (m-n)x\}$$

Ｔ：積分計算は、「次数は低く、積は和に」が基本ですね。

Ｓ：よって、

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ mx\ sin\ nx\ dx = -\int_{0}^{\pi} \{cos\ (m+n)x - cos\ (m-n)x\} \quad dx$$

ここで、$m=n$ のときは

上の積分を P とすると、

$$P = -\int_{0}^{\pi} cos\ 2nx\ -1 dx = -\left[\frac{1}{2n} sin\ 2nx - x\right]_{0}^{\pi} = \pi$$

また、$m \fallingdotseq n$ のときは

$$P=-\left[\frac{1}{m+n}sin\,(m+n)x-\frac{1}{m-n}sin\,(m-n)x\right]_0^{\pi}=0$$ 以上で示しました。

Ｓ：続いて(2)をやります。これは部分積分ですね。

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\,sin\,nx\,dx=2\left[-\frac{1}{n}xcos\,nx\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}-\frac{1}{n}cos\,nx\,dx$$

$$=-\frac{2\pi}{n}cos\,n\pi$$ となりました。

Ｔ：ここで、 $cos\,n\pi$ をどうしますか。

Ｓ：ええと。 n が偶数ならば１、n が奇数ならば -1 ですから、$cos\,n\pi=(-1)^n$ とおけます。よって、

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\,sin\,nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$$ となりました。

Ｔ：そうですね。今もとめたこの式、正確に言うとこの式をπで割ったものがとても重要な式で、実は(3)の答えはもうここにあるのです。

Ｓ：えっ。つまり、$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$ ということなのですか。

Ｔ：そうです。これがフーリエサイン係数です。

Ｓ：なぜですか。

Ｔ：なぜそうなるかは追々説明することにして、次の問題に入っていきましょう。

Ｔ：まず、披積分関数のカッコをはずします。大変なような気がしますが、

$\int_{-\pi}^{\pi}sin\,mx\,sin\,nx\,dx=0\,(m\fallingdotseq n)$ があるので多くの積分が０になるので安心です。

$$\{x-(a_1sin\,x+a_2sin\,2x+\cdots+a_nsin\,nx)\}^2$$
$$=x^2 \text{ -- } A$$
$$+(a_1{}^2sin^2x+a_2{}^2sin^2\,2x+\cdots+a_n{}^2sin^2\,nx) \text{ -------- } B$$
$$-2(a_1xsin\,x+a_2xsin\,2x+\cdots+a_nxsin\,nx) \text{ -------- } C$$
$$-2(a_1sin\,x\,a_2sin\,2x+a_1sin\,x\,a_3sin\,3x+\cdots) \text{ -------- } D$$

上の４つの項の積分を考えましょう。

Ｓ：Aは簡単ですね。$2\int_0^{\pi}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^3$

B は(1)の $m=n$ の場合ですから各項ともπ がでてきますね。

つまり、 $\pi\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$ となります。

C は(2)の結果を利用すればいいですね。

$4\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{a_k}{k}$ となります。

最後に D の積分は(1)の結果から全部０なのですね。一番いやな部分が全部消えたわけですね。

よって、$I_n=\dfrac{2}{3}\pi^3+\pi\sum_{k=1}^{n}\left({a_k}^2-(-1)^{k+1}\dfrac{4a_k}{k}\right)$ となりました。

Ｔ：Σでまとめないとなかなかやっかいですね。さあ、あとはこれの最小値ですから後ろの項を平方完成すればいいわけです。

Ｓ：$I_n=\dfrac{2}{3}\pi^3+\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(a_k-(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\right)^2-\dfrac{4}{k^2}\right\}$

よって、$a_k=(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}$ 　のとき最小となります。

Ｔ：これでとりあえず全部解答できましたね。

Ｓ：これで、$n\to\infty$ とすると、$y=x$ になるのですか。

Ｔ：ではこの関数が $y=x$ に近づく様子をパソコンでみてみましょう。

$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}sin\,kx$ 　とすると、

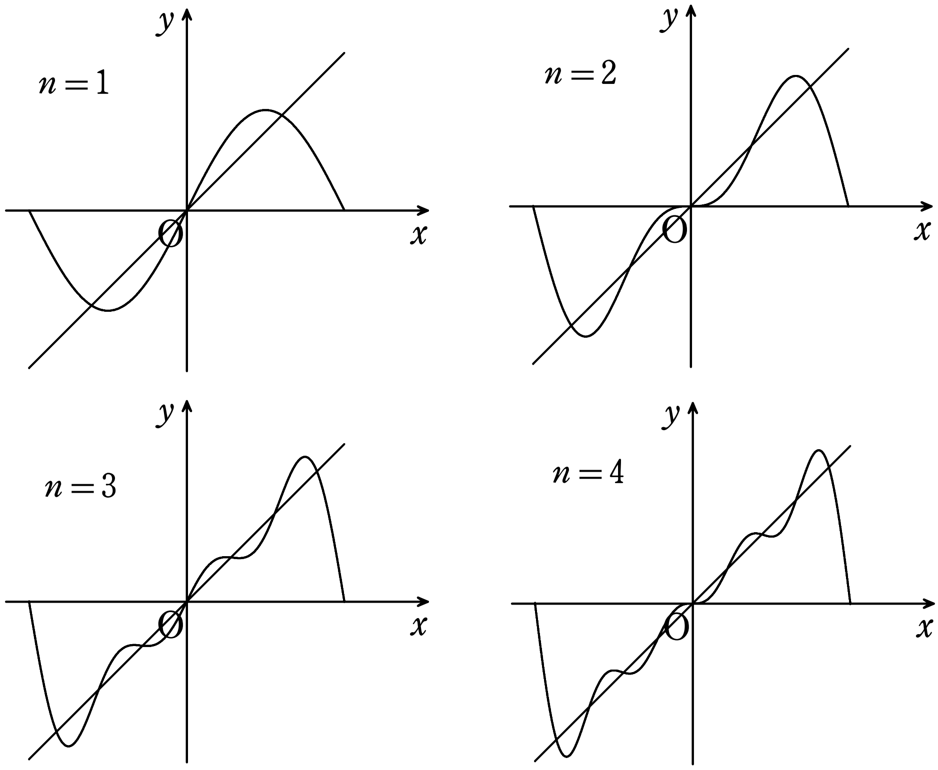
$f_1(x)=2sin\,x$

$f_2(x)=2\left(sin\,x-\dfrac{1}{2}sin\,2x\right)$

$f_3(x)=2\left(sin\,x-\dfrac{1}{2}sin\,2x+\dfrac{1}{3}sin\,3x\right)$

$f_4(x)=2\left(sin\,x-\dfrac{1}{2}sin\,2x+\dfrac{1}{3}sin\,3x-\dfrac{1}{4}sin\,4x\right)$

とりあえずこの４つのグラフを並べてみましょう。



Ｔ：両端の部分はまた別問題なので、そこ以外に注目すると、確かに n を増やすと、

$y=x$ に近づいていく様子がわかりますね。

もっと n を大きくすると下図のようになります。パソコンの威力は凄いですね。

S：I_n を最小とする a_k が、$a_k=(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}$　と求まり、

$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\sin kx$　が得られました。

T：このとき、

$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\sin kx$　と書いたりします。

つまり、$y=x$ のフーリエ級数を求めたということです。

S：$-\pi$ から π　までの間では、$x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\sin kx$ といっていいわけですね。

T：まあ、そうですね。例えば今の式の x を $\dfrac{\pi}{2}$ とするとどんな式になりますか。

S：左辺は $\dfrac{\pi}{2}$ 、右辺は、k が偶数の時 $\sin kx=0$ なので奇数項だけ残って、

$2\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots\right)$ となります。

T：このことから、$\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$ というライプニッツの級数ができあがります。もう一つ面白い級数がありますので紹介しましょう。この問題では、

$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\{x-(a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx)\}^2\,dx$ としたとき、I_n を最小にするような a_k の値が、$a_k=(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}$ だったわけですよね。先ほど求めた解によると

$I_n=\dfrac{2}{3}\pi^3+\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(a_k-(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\right)^2-\dfrac{4}{k^2}\right\}$ でしたから、$a_k=(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}$ のとき、

$I_n=\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ となります。ここで、I_n は x と、$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}\sin kx$ の誤差なので、$n\to\infty$ とすると、$I_n\to 0$ となることがいえますね。

S：そうですね。先ほどのパソコンのグラフからもその様子が窺えました。

T：そうすると、$I_n=\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ から、次の級数が得られます。

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$　　$\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}\right)$

S：$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)=2-\dfrac{1}{n}$ となるから、何かに収束することはわかっていましたが、まさか $\dfrac{\pi^2}{6}$ になるとは思っても見ませんでした。

T：フーリエ級数からはこのような面白い級数をたくさん得ることができます。

Ｓ：ところで、先ほど先生がいわれた、$a_k=(-1)^{k+1}\dfrac{2}{k}$ の値は、実は(2)の結果

（$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$ の値）をπ で割ったものになっているというのはなぜでしょうか。

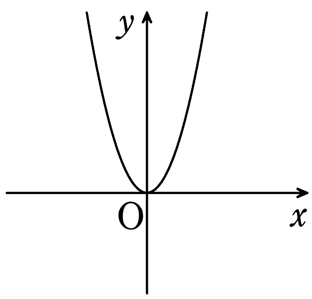
Ｔ：ではこれからその話をしましょう。一般の関数のフーリエ級数の求め方を、粗っぽく説明したいと思います。この話は関数の連続の問題など細かいところをきちんと議論しなければならないのですが、それは大学に行ってからということで、ここではフーリエ級数の雰囲気を純粋に味わってもらいたいと思います。

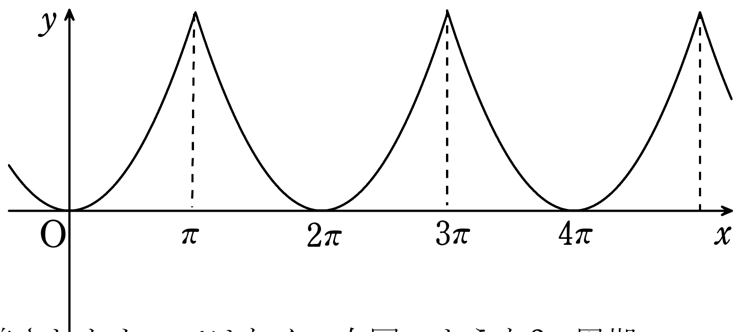
まず、今ある関数 $f(x)$ を三角関数の無限和を用いて、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ とかけたとします。

Ｓ：いくつかの疑問をいっていいですか。まず、$f(x)$ は何でもいいのですか。それからなぜ、最初に定数項を$\dfrac{a_0}{2}$ とおくのでしょうか。

Ｔ：まず、$f(x)$ は必ず周期 2π の関数です。例えば $f(x)=x^2$ といった場合は、





左のような、全実数で定義されたものではなく、右図のような2π 周期の $y=x^2$ のグラフを考えます。そうじゃないと、三角関数の結合では表せませんね。

それから、一応$f(x)$ は連続関数ということにしておきますが、例えば次のような関数、$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x\leqq 0)\\ 1 & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$ などは$x=0$ や$x=\pi$ などで連続ではないのですが、このようないくつかの点でのみ連続でないような関数（区分的に連続な関数という）についてもフーリエ級数を求めることができます。

　それから、最初に定数項を$\dfrac{a_0}{2}$ とおくのは、後々のためです。理想を言えば、

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ として、定数項が$n=0$ のときの$\cos$ の係数となっていればきれいな式なのですが、そうは都合良くいきません。

じゃあ、$f(x)=c+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とおいてもいいのですが、そうすると、わざわざもう一つの文字 c を使わなければならないのでやっかいです。そこで、

$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とすれば、定数項もコサイン係数と同じ法則で表せるということです。後でその意味がわかると思います。

Ｔ：では、フーリエ級数の求め方の説明に入りましょう。

Ｓ：$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx+b_n sin\,nx)$ とかけたとき、a_n , b_n がどんな式で表せるかということでしたね。

Ｔ：そうです。a_n をフーリエコサイン係数、b_n をフーリエサイン係数といいました。

なお、本当は、$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx+b_n sin\,nx)$ と＝でなく～を用います。

まず、a_n は次のようにして求めます。

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\,dx$ を考えます。これを $f(x)$ と $cos\,mx$ との内積といいます。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)\right\}cosmx\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}cos\,mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\,cosmx+b_n sinnx\,cos\,mx)\right\}dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}cosmx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\,cos\,mx+b_n sinnx\,cosmx)dx\cdots \text{（※）}$$

ここで、ちょっと粗っぽいのですが、積分と無限級数和の順序交換をします。

すると、

$$※=\frac{a_0}{2}\left[\frac{1}{m}sinmx\right]_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n cosnx\,cosmx+b_n sinnx\,cosmx)dx$$

Ｓ：この順序交換はいつでもできるのですか。

Ｔ：部分和、つまり、$\sum_{k=1}^{n}$ ならばいいのですが、無限和ですから、「無限級数をとってから積分する」というのと、「項別に積分したものの無限級数を考える」というのは違ってくる可能性があります。だから本当はここで議論が必要になるのですが、ここではそこを飛ばして、早くフーリエ係数を求めることに専念します。ただ、イメージとすればn が限りなく大きくなったところではほとんど無視していい項ばかりになるので、部分和と同じように扱っても大丈夫だということです。

さて、※式の続きですが、最初の項は０になりますし、$sin\,nx\,cos\,mx$ は奇関数ですから$-\pi$ からπまでの積分が０になりますので大幅にラクになります。

$※=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n\int_{0}^{\pi}cos\,nx\,cos\,mx\,dx$　ここで積和を使って、

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{0}^{\pi}\{cos\,(m+n)x+cos\,(m-n)x\}\ dx$$

今回の横浜国大の問題を思い出して、

$$\int_{0}^{\pi}cos\,(m+n)xdx=0 \qquad \int_{0}^{\pi}cos\,(m-n)xdx=\begin{cases}0\ (n\neq m)\\ \pi\,(n=m)\end{cases}$$

でしたから、結局

$※=a_m\pi$　となりました。

以上から、$a_m\pi=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmx\,dx$　なので、

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmx\,dx$　$(m=1,2,3,\cdots)$　が得られました。これがフーリエコサイン係数です。

Ｓ：すると、例えば今回の問題の場合、$f(x)=x$ ですから、これのフーリエコサイン係数は、$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcosmx\,dx$　$(m=1,2,3,\cdots)$となりますが、$xcosmx$ は奇関数なので、$a_m=0$ となるわけですね。

Ｔ：そうです。だから$f(x)=x$ の場合はcos は関係なくて、sin だけで決まる級数になるわけです。

では、続けてフーリエサイン係数も同様に求めましょう。

Ｓ：今度は、$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\,mx\,dx$ を考えるのですね。

Ｔ：やってましょう。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinmx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)\right\}sinmx\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}sin\,mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\,sinmx+sinnx\,sin\,mx)\right\}dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sinmx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx\,sin\,mx+b_n sinnx\,sin\,mx)dx\cdots\text{（※）}$$

積分と無限級数和の順序交換をして、

$$※=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sin\,mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n cosnx\,sinmx+b_n sinnx\,sinmx)dx$$

$sinmx$，$sin\,nx\,cos\,mx$ はともに奇関数なので積分はうまく０になるので、

$$※=\sum_{n=1}^{\infty}2b_n\int_{0}^{\pi} sin\,nx\,sin\,mx\,dx$$　ここで積和を使って、

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{0}^{\pi}\{cos\,(m+n)x-cos\,(m-n)x\}\ dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi} cos\,(n-m)x\,dx\,\pi\qquad(\because\int_{-\pi}^{\pi} cos\,(m+n)x\,dx=0)$$

ここで、$\int_{0}^{\pi} cos\,(m-n)xdx=\begin{cases}0 & (n\fallingdotseq m)\\ \pi & (n=m)\end{cases}$ だったので、

$※=b_m\pi$　と求まりました。

よって、$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinmx\,dx$　$(m=1,2,3,\cdots)$　が得られました。これがフーリエサイン係数です。

Ｔ：フーリエ級数の入り口の入り口の話いよいよまとめです。まず、前回のおさらいをしておきましょう。

Ｓ：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\ nx+b_n sin\ nt)$ とかけたとき、a_n , b_n の求め方をやりました。

ここで、a_n をフーリエコサイン係数、b_n をフーリエサイン係数といいました。

本当は、$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\ nx+b_n sin\ nt)$

とかくのでしたね。

結論は、次のように表すことができました。

$$\boxed{\begin{aligned} a_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosmx\,dx \quad (m=1,2,3,\cdots)\\ b_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinmx\,dx \quad (m=1,2,3,\cdots)\end{aligned}}$$

Ｔ：$m=1,2,3,\cdots$ ですから、 n を用いて

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnx\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とかいておきましょう。

最後に、a_0 を求めます。このa_0 が、上の式の　$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx$　のn を０にしたものになっていれば万々歳です。

Ｓ：a_0 はどうやって求めるんですか。

Ｔ：単に$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ を計算します。

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}cos\ nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}sin\ nx\,dx\right\}$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=a_0\pi$$

よって、$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$　これは、$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx$　のn を０にしたものになってることに注意してください。以上より次のようにフーリエ級数をまとめることができます。

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\ nx+b_n sin\ nt)\\ &a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)\\ &b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnx\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}}$$

Ｔ：では最後にまとめとして、$f(x)=x^2$ のフーリエ級数を求めてみましょう。

Ｓ：やってみます。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$ から、

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2 cos nx\,dx \quad \text{（偶関数）}$$

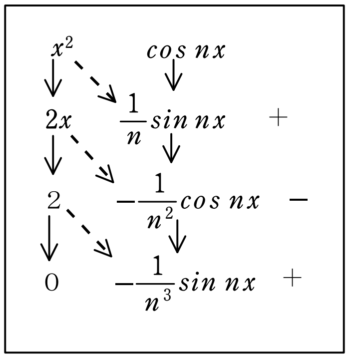
$cos\,nx$ の積分で $\frac{1}{n}$ が出てきてしまうので、$n=0$ のときと $n\neq 0$ で場合分けが必要です。

$n=0$ のとき、$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2$

$n\neq 0$ のとき、

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2 cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}sin\,nx+\frac{2x}{n^2}cos\,nx-\frac{2}{n^3}sin\,nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)(-1)^n=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$



便利図

これがフーリエコサイン係数ですね。

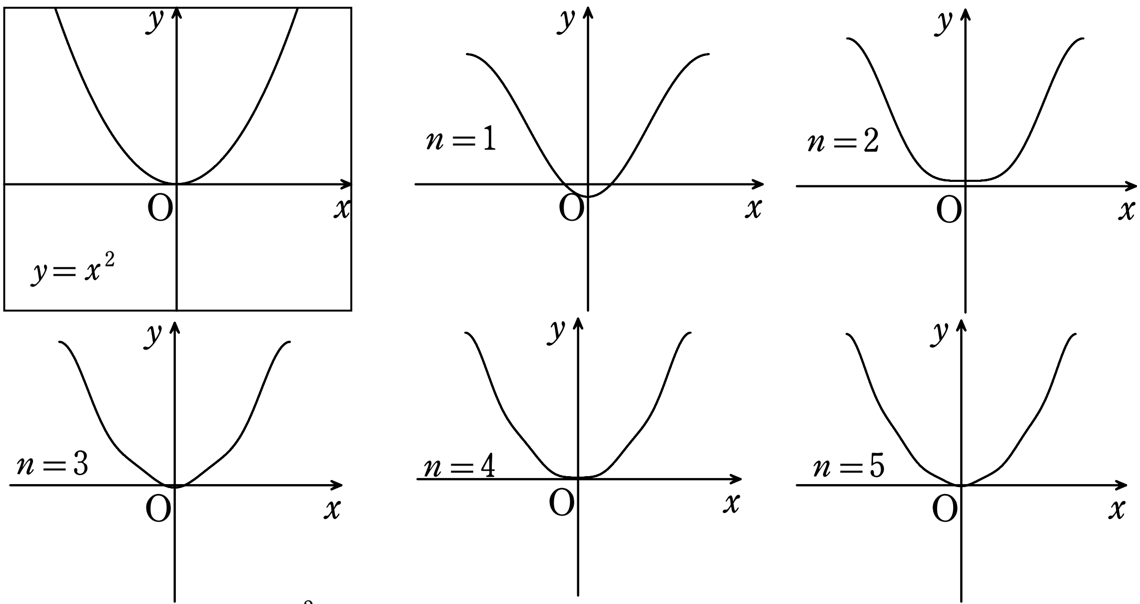
次に、$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x) sin nx\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$ から、

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 sin nx\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$ ですがこれは

ありがたいことに被積分関数が奇関数なので、

$b_n=0$ つまりフーリエサイン係数は０ですね。

以上から、$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}cos\,nx$ 　となりました。



参考　$n=5$ のとき、$\frac{\pi^2}{3}-4cos x+cos\,2x-\frac{4}{9}cos\,3x+\frac{1}{4}\,cos\,4x-\frac{4}{25}cos\,5x$

しもまっち