数学ショートショート　重積分　　　　　　　　下町壽男

$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x<y\}$ として次の積分を計算せよ。

$$\iint_D \frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}dxdy$$　　（東北大AOⅡ　工学部合格者課題より）

S：この問題ですが、答えを見てもよくわからなかったんですけれど。

T：答えはどうなっていたの？

S：答えは次のようになっていました。

解答

$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x<y\}$ に対して、近似増加列 $\{D_n\}$ を

$D_n=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y-\frac{1}{n}\right\}$ とおく。

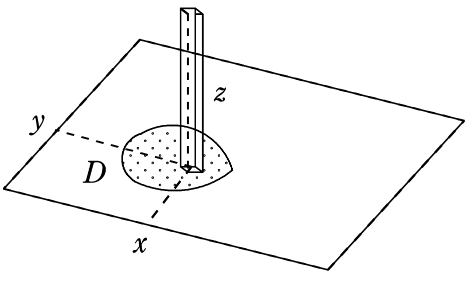
$$\iint_D \frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}dy\int_0^{y-\frac{1}{n}}\frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}dx=\frac{9}{10}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}$$

なぜ急に $\frac{1}{n}$ が出てくるのかがわからないのです。

T：なるほど。じゃあ少しじっくり考えてみましょう。

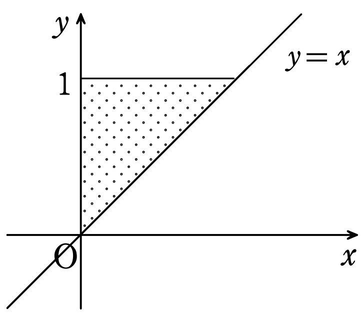
まず、$\iint_D \frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}dxdy$ の意味はなんだろう。

これは、xy 平面内の領域 D 内のすべての点 (x,y) に対して、$z=\frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}$ の値を計算して（それに $dx\,dy$ という無限小幅をかけて）足しまくるというイメージです。今、D では $y>x$ なので、$z>0$ です。すると、これは、曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面とで囲まれる部分の体積を求めていることになりますね。



D 内で x,y が変化すると $z=f(x,y)$ がそれにともなって決定する。
すると空間に曲面ができる。
$z>0$ のとき、曲面と xy 平面で囲まれた部分の体積は、$dV=z\,dxdy$ から $\iint_D zdxdy$ となる。

今、領域 D を xy 平面上に図示すると、図のようになる。この領域内のすべての点にわたって $z=\frac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}$ を計算するためには、点を選ぶ順序をうまく決めなければならない。



君はパソコンでプログラミングができるよね。

例えばBASICで次のようなプログラムを考えてみよう。

```
① for i=1 to 5
②  for j=1 to 3
③   y=i : x=j
④  next j
⑤ next i
```

このプログラムはどんな処理をしていると思う？

S：　まず、$y=1$ のとき $x=1,2,3$ 、$y=2$ のとき $x=1,2,3$ ……といくので、

結局、$(x,y)=(1,1),(2,1),(3,1)\quad(1,2),(2,2),(3,2)\quad(1,3),(2,3),(3,3)$

$(1,4),(2,4),(3,4)\quad(1,5),(2,5),(3,5)$

という15個の (x,y) の組を求めているのですね。

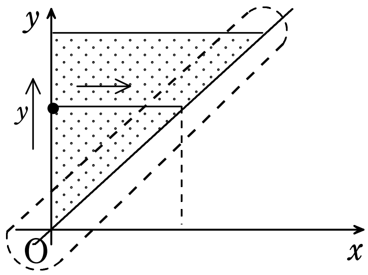
T：そうです。これがまさに重積分の考え方です。

S：なるほど、for i=1 to 5　は $\int_1^5$　　next　i　は dy ですね。

T：そう。プログラムの②行目から④行目はいわば x で積分しているところなので、ここでは、 y は定数となっていることに注意しよう。

さて、本題に戻ろう。今、$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,0\leqq x<y\}$ なので、これをBASICでプログラミングすると

```
for y=0 to 1
  for x=0 to y
   z=f(x,y)
  next x
 next y
```



図で示すと、上のような形で、D 内の点をしらみつぶしに網羅していくわけだ。

さて、そこでポイントです。

今、関数は $z=\dfrac{1}{(y-x)^{\frac{1}{3}}}$ だったので、これは $y=x$ 上の点では定義されませんね。

S：あっそうか。分母が０になるんだ。

T：そうです。ですからこの積分は、2重積分の広義積分（仮性積分）なのです。

つまり、0の少し手前からスタートして、 $y=x$ の少し手前で終了する形にして、積分をして、その後、その微小部分を０に近づけるという作戦です。

S：だから　$D_n=\left\{(x,y)\mid \dfrac{1}{n}\leqq y\leqq 1,0\leqq x\leqq y-\dfrac{1}{n}\right\}$ なんですね。

T：あとは普通の広義積分なので、できるでしょう。

S：$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}dy\left[-\frac{3}{2}(y-x)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{y-\frac{1}{n}}=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\right\}dy=\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}y+\frac{9}{10}y^{\frac{5}{3}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{10}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}-\frac{9}{10}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}$　ここで $n\to\infty$ として、$\dfrac{9}{10}$