行列式の図形的意味について

【２次の正方行列】

§１　一次変換の意味

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

平面上の点$P(x\,,\,y)$ が行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって点$Q(x'\,,\,y')$ に移る

§２　基底の変換

例えば　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

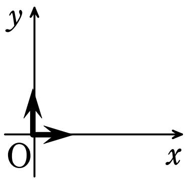
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

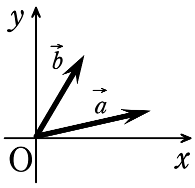
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$　となる。

行列 A は、xy 平面上の基本ベクトル

$\vec{e_1} = (1\,,\,0)$ を $\vec{a} = (4\,,\,1)$ に、

$\vec{e_2} = (0\,,\,1)$ を $\vec{b} = (2\,,\,3)$ に移す変換である。





つまり、行列　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は、

xy 平面上の、原点 O を始点とする大きさ１の
２つの直交する基本ベクトルで作られる
正方形（単位正方形）を、
$\vec{a} = (a\,,\,c)$　$\vec{b} = (b\,,\,d)$ で作られる
平行四辺形に移す変換である。

【３次の正方行列】

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

空間の点 $P(x\,,\,y\,,\,z)$ が行列

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ によって点 $Q(x'\,,\,y'\,,\,z')$　に移る

例えば　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

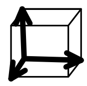
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$　となる。

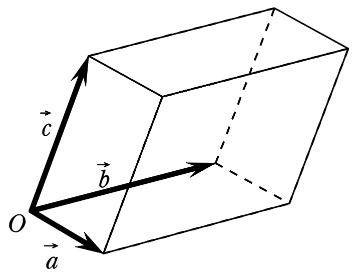
行列 A は、xyz 空間上の基本ベクトル

$\vec{e_1} = (1\,,\,0\,,\,0)$　を　$\vec{a} = (2\,,\,0\,,\,1)$ に

$\vec{e_2} = (0\,,\,1\,,\,0)$　を　$\vec{b} = (1\,,\,1\,,\,3)$ に

$\vec{e_3} = (0\,,\,0\,,\,1)$　を　$\vec{c} = (1\,,\,-1\,,\,2)$ に移す変換である。





つまり、行列　$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ は、

xyz 空間の、原点Oを視点とする大きさ１の
３つの直交する基本ベクトルで作られる
立方体（単位立方体）を
$\vec{a} = (a\,,\,d, g)$　$\vec{b} = (b\,,\,e\,,\,h)$　$\vec{c} = (e\,,\,f\,,\,i)$ で作られる
平行六面体に移す変換である。

行列式の図形的意味について

§３　行列式の定義

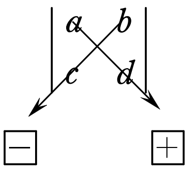
行列　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において

$ad-bc$ を行列式という。

これを Δ　$|A|$ などで表す。

つまり　$|A|=ad-bc$ である

行列の計算は次のように行う



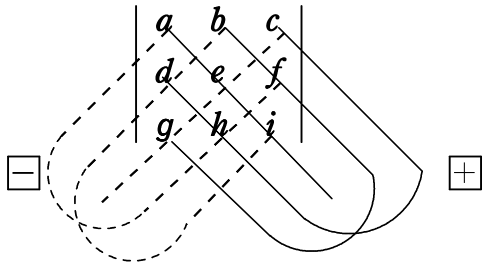
行列　$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ において

$aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$　を行列式という。

これを Δ　$|A|$ などで表す。

つまり　$|A|=aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$　である

行列の計算は次のように行う



§４　行列式の意味

行列式　$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　の意味は

２つのベクトル

$\vec{a}=(a\,,c)$　$\vec{b}=(b\,,d)$ で作られる

平行四辺形の（符号付）面積である

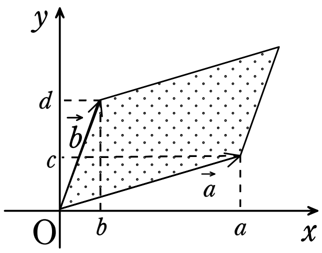
参考

２つのベクトルで作られる平行四辺形の

面積は　$S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2}$

$=\sqrt{(ad-bc)^2}=|ad-bc|$



行列式　$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ の意味は

３つのベクトル

$\vec{a}=(a\,,d\,,g)$, $\vec{b}=(b\,,e\,,h)$, $\vec{c}=(c\,,f\,,i)$ で作られる

平行六面体の（符号付）体積である

参考

$aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$ を変形すると

$(dh-eg)c-(ah-bg)f+(ae-bd)i$　となる

このとき　$\vec{n}=(dh-eg\,,-ah+bg\,,ae-bd)$ は

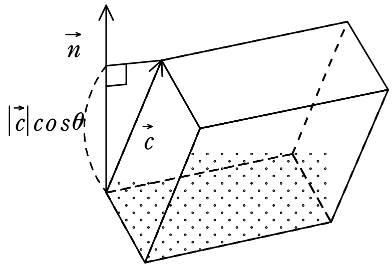
$\vec{a}=(a\,,d\,,g)$, $\vec{b}=(b\,,e\,,h)$ に垂直で、大きさが

$\vec{a}\,,\vec{b}$ で作られる平行四辺形の面積であるベクトルである。

(計算が少し面倒ですが、確かめるのは容易です)

つまり、$|A|=\vec{n}\cdot\vec{c}=|\vec{n}||\vec{c}|cos\theta$　となり、

これは平行六面体の（符号付）体積です。



行列式の図形的意味について

§５　行列式の性質

★　２次の正方行列 A , B に対して、

$|AB|=|A||B|$ が成り立つ。

(計算をすると容易に確かめられます)

★ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行と列を入れ替えた行列

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の行列式は一致する

(行と列を入れ替えることを転置をとるという)

★　3次の正方行列 A , B に対して、

$|AB|=|A||B|$ が成り立つ。

(計算は面倒ですが確かめられます)

★ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行と列を入れ替えた行列

$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ の行列式は一致する

(行と列を入れ替えることを転置をとるという)

§６　ベクトル方程式の行列表現

例えば　$\vec{a}=(1,2)$　$\vec{b}=(3,4)$ のとき

$\vec{a}=1\vec{e_1}+2\vec{e_2}$

$\vec{b}=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$

なので、これを行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の

面積が、$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ で作られる平行四辺形

の面積（実際は1辺１の正方形)

の $\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right|=2$ 倍（つまり２）

であることを示す式である。

また、このとき、$\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$

$\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$

と表される点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$があるとすると

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$ とかける

この式は$\vec{p}$, $\vec{q}$ で作られる平行四辺形の

面積が、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の

$\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right|=7$ 倍であることがわかる。

更に$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix}$$

とできるので、面積は　$|66-80|=14$ となる

例えば$\vec{a}=(1,1,3)$,$\vec{b}=(3,2,5)$,$\vec{c}=(0,1,2)$ のとき

$\vec{a}=1\vec{e_1}+1\vec{e_2}+3\vec{e_3}$

$\vec{b}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}+5\vec{e_3}$

$\vec{c}=0\vec{e_1}+1\vec{e_2}+2\vec{e_3}$　　なのでこれを行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で作られる平行六面体の

体積が、$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ で作られる平行六面体

の体積（実際は1辺１の立方体)

の $\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right|=4+0+9-0-6-5=2$ 倍

（つまり２）であることを示す式である。

また、このとき、$\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}$　$\vec{r}=-\vec{a}+2\vec{b}$

と表される点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $R(\vec{r})$ があるとすると

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ で作られる平行六面体の

体積が、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の

$\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right|=|0-6-2+2-0-8|=14$倍

更に $$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$

とできる。

行列式の図形的意味について

§ 7　いくつかの問題

$\boxed{例}$1

$\triangle OAB$ において、

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{5}$, $\overrightarrow{OQ}=-\vec{a}+2\vec{b}$

で表される点を P , Q とするとき、

$\triangle OPQ$ の面積は$\triangle\ ABC$ の何倍か。

$\boxed{解答}$

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$|\triangle|=\left|\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right|=\frac{4}{5}\text{倍}$$

$\boxed{例}$2

$A(1,2)$, $B(5,-1)$, $C(3,6)$

のとき$\triangle\ ABC$ の面積を求めよ。

$\boxed{解答}$

$\overrightarrow{AB}=(4,-3)$

$\overrightarrow{AC}=(2,4)$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|16+6|=11$$

$\boxed{例}$1

四面体$OABC$ において

$\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$　$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$　$\overrightarrow{OR}=\vec{a}-3\vec{b}$

で表される点をP , Q , R とするとき、

四面体$OPQR$ の体積は四面体 $OABC$ の体積の何倍か。

$\boxed{解答}$

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\\ \vec{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$|\triangle|=|0+3-12-2-0-9|=20\text{ 倍}$$

$\boxed{例}$2

$A(1,2,3)$, $B(5,-1,2)$, $C(3,6,0)$, $D(-1,1,1)$

のとき、四面体$ABCD$の体積を求めよ。

$\boxed{解答}$

$\overrightarrow{AB}=(4,-3,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2,4,-3)$

$\overrightarrow{AD}=(-2,-1,-2)$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\text{四面体}ABCD=\frac{1}{6}|-32-18+2-8-12-12|=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}$$