第 37 回　AMI 東北大会（福島大会）

「つながる」三角形の５心

～内心・外心・重心・垂心・傍心の距離～

盛岡三高　下町壽男

儒教の教えに五常の徳というものがある．

仁：人を思いやる心

義：利欲にとらわれない心

礼：礼儀正しく謙虚な心

智：知識を重んじる心

信：友情に厚く誠実な心

この５つの心を磨くことで人格は陶冶される．

しかし，重要なのは，これらの５つは個々独立した概念ではなく，互いに関連しあっていることだ．キーワードは「つながり」である．５つの心がどう「つながり」を持っているか我々は考えていかなければならない．

三角形に５心というものがある．

内心：角の二等分線の交点　内接円の中心

外心：垂直二等分線の交点　外接円の中心

重心：中線の交点

垂心：頂点から対辺に下した垂線の交点

傍心：1 内角 2 外角の 2 等分線の交点　3 個ある

この５つの心を学ぶことで三角形の理解は深まる．

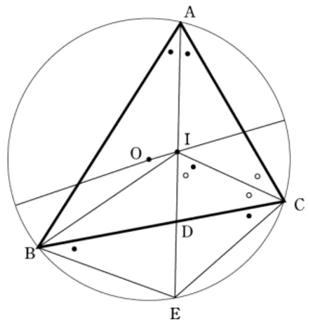
しかし，重要なのは，これらの５つは個々独立した概念ではなく，互いに関連しあっていることだ．キーワードは「つながり」である．５つの心がどう「つながり」を持っているか我々は考えていかなければならない．

そこで，今回は，三角形の５つの心の距離関係を調べてみよう．

	内心	外心	重心	垂心	傍心
内心		①	▲	▲	⑥
外心			④	③	②
重心				⑤	▲
垂心					▲
傍心					

全部で 10 通りの距離が考えられるが，下表①～⑥について考えてみたい．残りは，読者（参加者）の宿題としたい．

①　内心と外心の距離



図において，O を△ABC の外心，I を内心，外接円の半径を R，内接円の半径を r，内心と外心の距離 OI を，$\mathrm{OI}=d$ とおく

（ｉ）方べきの定理

方べきの定理から $(R+d)(R-d)=\mathrm{IA}\times\mathrm{IE}$

なので，IA×IE を求めれば d がわかる．

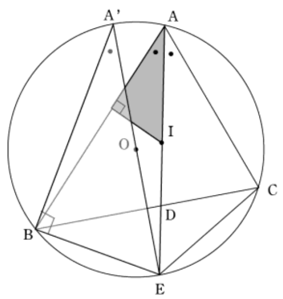
（ⅱ） IE＝BEを示す

図において，円周角一定の定理から

∠EBC=∠ECB＝●　なので，BE=CE

また，∠EIC=∠ECI＝●○　なので　CE=IE

BE=IE=CE がいえた．つまり，IA×IE のかわりに，IA×BE を考えればよい．



（ⅲ）三角比を考えて

図において，sin●を 2 通り考えて

$$\sin\bullet=\frac{r}{\mathrm{AI}}=\frac{\mathrm{BE}}{2R}$$

この式から，$\mathrm{IA}\times\mathrm{BE}=2rR$

（ⅳ）元の式に代入して

$(R+d)(R-d)=2rR$　※

これを整理すると

$d=\sqrt{R(R-2r)}$　　求めた！

（ⅴ）補足すること

- $AB=c, BC=a, CA=b$，△ABC の面積を S とすると次のことがいえる．

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$$ ㊦

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$ ㊖

下町より，$2rR=\dfrac{abc}{a+b+c}$

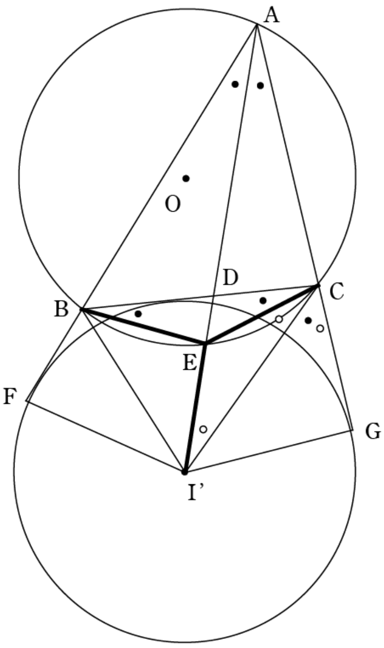
※より $(R+d)(R-d)=\dfrac{abc}{a+b+c}$

美しいなあ．

- $d=\sqrt{R(R-2r)}$ において，ルートの中は 0 以上なので，$R\geqq 2r$

つまり，「外接円の半径は，内接円の半径の 2 倍以上である」ことがいえた．

①　傍心と外心の距離



図において，O を△ABC の外心，I' を傍心，外接円の半径を R，傍接円の半径を r'，傍心と外心の距離 OI' を，$OI'=d$ とおく．

（ⅰ）$BE=CE=I'E$ を示す

図において，円周角一定の定理から，

∠BCE＝∠CBE なので，BE＝CE

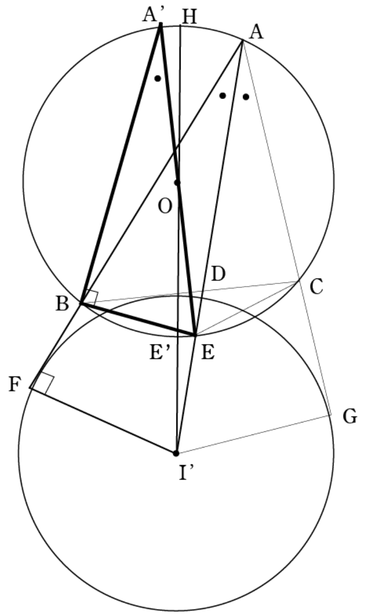
CI' は△ABC の∠C の外角の二等分線なので，

∠ECI’＝○　とすると，∠I’CG＝○＋●

ところが，∠I’CG は△AI’C の外角なので，

∠AI’C＝○　よって，CE＝I’E

（ⅱ）方べきの定理



図において，方べきの定理と(ⅰ)より

$I'E\times I'H=I'E\times I'A=BE\times I'A$

よって　$(d-R)(d+R)=BE\times AI'$

（ⅲ）三角比を考えて

図において，sin●を 2 通り考えて

$$\sin● = \frac{r'}{AI'}=\frac{BE}{2R}$$

この式から，$IA\times BE=2r'R$

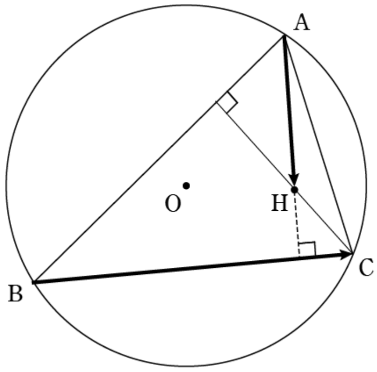
（ⅳ）元の式に代入して

$(d-R)(d+R)=2r'R$

これを整理すると

$d=\sqrt{R(R+2r')}$　　求めた！

③　外心と垂心の距離



これはベクトルで考えてしまおう．

（ｉ）垂心の位置ベクトル

△ABCの外接円の半径をRとおく．

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ となるHを考えると，

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$なので

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$\qquad=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=R^2-R^2=0$

よって，AH⊥BC

同様に考えて，BH⊥AC，CH⊥AB

つまり，Hは垂心であることがわかった．

（ⅱ）内積を求めておく

AB＝c，BC＝a，$CA=b$ とおくと，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　より

$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2-c^2$

同様に考えて

$2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2R^2-a^2$

$2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2R^2-b^2$

（ⅲ）大きさを求める

$|\overrightarrow{OH}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2$

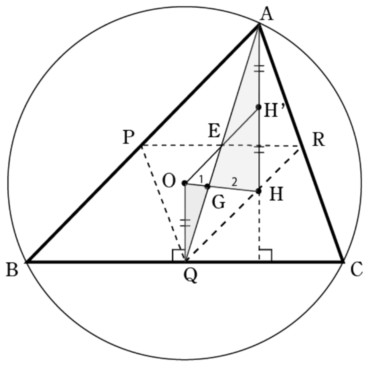
$=3R^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=3R^2+6R^2-a^2-b^2-c^2$

よって　$\mathrm{OH}=\sqrt{9R^2-a^2-b^2-c^2}$

残念ながら，あまりきれいな形にならなかった．

④　外心と重心の距離
⑤　垂心と重心の距離



（ｉ）外心と重心と垂心は一直線上にある．

この３点がのっている直線はオイラー線と呼ばれる．ではまず，そのことを証明しておこう．

図において，O を△ABC の外心，H を垂心，G を OH と AQ の交点，また，AB，BC,CA の中点をそれぞれ P,Q,R とする．

△APQ は△ABC を A を中心に 1/2 倍に縮小したものだから，△APR の垂心を H’とすると，

$$\mathrm{AH'}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}$$

□APQR は平行四辺形で，PR と AQ はその対角線，E はその交点なので AE＝QE　㊦

また，OQ は BC の垂直二等分線なので OQ⊥BC. AH’⊥BC でもあるので，OQ∥AH　町’

下町より，△OQE≡△H’AE となるので，AH’=OQ

また，△OQG∽△HAG であるから，AH=2OQ

よって，QG : GA＝１：２となるので，G は△ABC の重心であることがわかった．

このことから，O，G，H は一直線上にあり，

OG : GH＝１：２となる．（終）

（ⅱ）外心と重心，垂心と重心の距離

（ｉ）の結果から距離が求められる．

$$\mathrm{OG}=\frac{1}{3}\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-a^2-b^2-c^2}$$

$$\mathrm{GH}=\frac{2}{3}\mathrm{OH}=\frac{2}{3}\sqrt{9R^2-a^2-b^2-c^2}$$

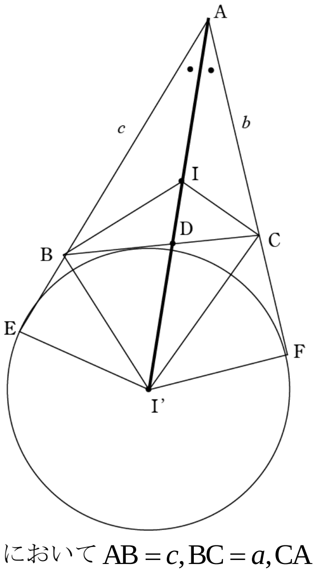
（iii）補足すること

図において，QH’を直径とする円は，AC の中点と，A から BC に下した垂線の足の 4 点を通っていることがわかる．また，PH’⊥AC，AC∥PQ から，∠QPH’＝90° となるので，この円は，AB の中点 P も通る．

つまり，QH’を直径とする円は，△ABC の各辺の中点 P，Q，R と AH の中点，A から BC に下した中点の足を通ることがわかる．

このことを B や C でも考えていくと，P，Q，R を通る円は，更に各頂点から対辺に下した垂線の足と，垂心と各頂点を結んだ線分の中点の合計 9 個の点を通ることがわかる．この円を 9 点円という．9 点円の中心は，図より，OH と QH’の交点，すなわち，OH の中点であることがわかる．

⑤　内心と傍心の距離



△ABC において $\mathrm{AB}=c, \mathrm{BC}=a, \mathrm{CA}=b$，

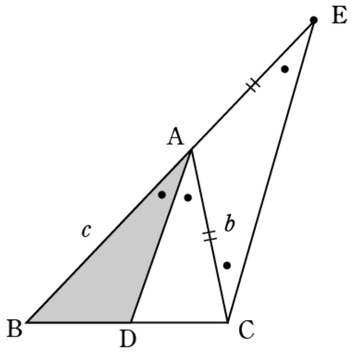
内心を I，傍心（の１つ）を I’とおく．

まず，いくつか準備をしよう．

（i）角の二等分線に関する定理

△ABC において，AD が∠A の二等分線のとき，BD : DC＝$c : b$ となる．このことから，BD，DC の長さはそれぞれ，

$$\mathrm{BD}=\frac{ac}{b+c}，\ \mathrm{DC}=\frac{ab}{b+c}$$ となる．



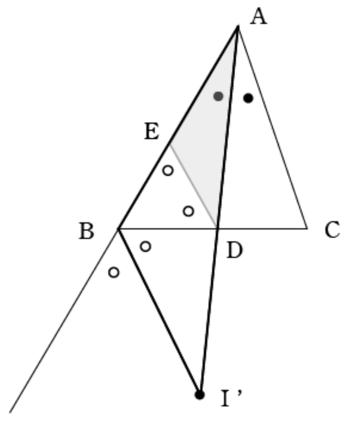
C を通り，AD に平行な直線をひき，それが BA の延長と交わる点を E とすると，△ACE は二等辺三角形となるので，AC=AE.

また，△ABD∽△EBC なので，BA : AE＝BD:DC すなわち，AB : AC＝BD : DC がいえた．

このことから，BI が∠B の二等分線のとき，

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID}=\mathrm{AB} : \mathrm{BD}=c : \frac{ac}{b+c}=(b+c) : a$$

となる．



外分の場合は，上図のように，D を通り I’B に平行な直線と AB の交点を E とすると，△BDE が二等辺三角形となるので BE=BD.

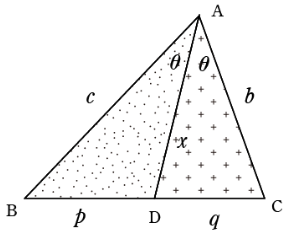
また，△ADE∽△AI’B なので，

AI’ : I’D＝AB : BE＝AB : BD＝$(b+c) : a$

以上より，内心 I と傍心 I’は線分 AD を $(b+c) : a$ の比にそれぞれ内分及び外分する点であることがわかる．

このとき，線分の長さ AI，AD，AI’は調和数列をなす．このような 4 点を調和点列という．

（ⅱ）角の二等分線 AD の長さ



図において，$x=\sqrt{bc-pq}$ となる．

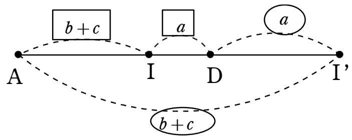
余弦定理を用いる証明が一般的だが，ここでは面積の考えから示す．

△ABC＋△ADC＝△ABC から

$$\frac{1}{2}cx\sin\theta+\frac{1}{2}bx\sin\theta=\frac{1}{2}bc\sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{2bc}{b+c}\cos\theta\\
&=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\\
&=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}\\
&=\sqrt{bc}\sqrt{1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}\\
&=\sqrt{bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}}\\
&=\sqrt{bc-pq}
\end{aligned}$$

（ⅲ）内心と傍心の距離

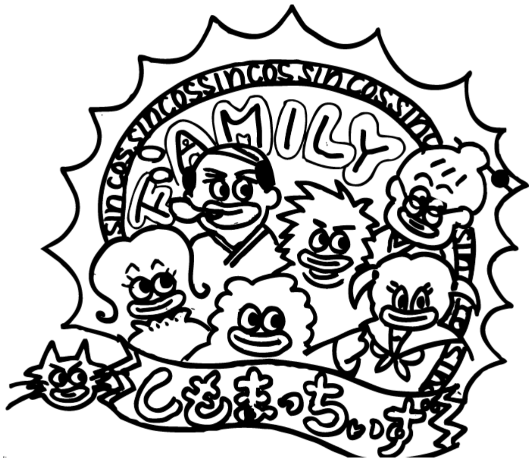


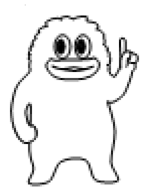
上の関係から

$$\mathrm{AI}=\frac{b+c}{a+b+c}\mathrm{AD}\quad,\quad \mathrm{AI'}=\frac{b+c}{b+c-a}\mathrm{AD}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{II'}&=\left(\frac{b+c}{b+c-a}-\frac{b+c}{a+b+c}\right)\mathrm{AD}\\
&=\frac{2a(b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}\sqrt{bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}}\\
&=\frac{2a\sqrt{bc}}{(a+b+c)(b+c-a)}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}\\
&=\frac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{b+c-a}}
\end{aligned}$$





http://simomath.blog.fc2.com/

（あなたと夜と数学と）