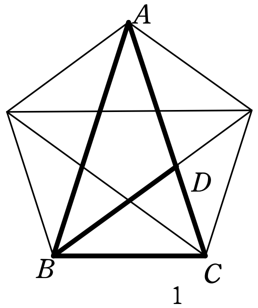
高校生にもわかる正5角形と正17角形の作図について

下町壽男

1　正5角形の作図

(1)　$cos\,72^\circ$ の値

①　三角形の相似



$\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ において、両者は底角が72°の二等辺三角形、$\triangle ABD$ も二等辺三角形なので、$BC=1$ とすると $BD=AD=1$

ここで $AB=x$ とすると相似比から

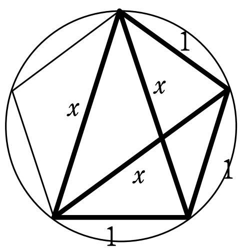
$x:1=1:(x-1)$

よって　$x^2-x-1=0$　　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$cos\,72^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

②　トレミーの定理

正5角形は円に内接するので、辺と対角線の比はトレミーの定理を用いると簡単に得られる。



図においてトレミーの定理を用いると

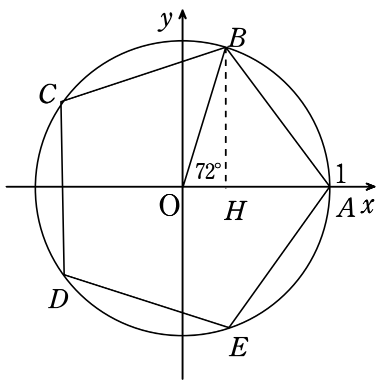
$x\times1+1\times1=x\times x$

$x^2-x-1=0$　　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$cos\,72^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

③　複素数の利用

正5角形の頂点 A,B,C,D,E に対応する複素数を $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ とする。



図において、B と E 及び C と D はそれぞれ x 軸に関して対称なので

$\overline{z}=z^4,\ \overline{z^2}=z^3$ がいえる。

$\theta=72^\circ$ とおくと

$z=cos\theta+i\,sin\theta$

$z^2=cos\,2\theta+i\,sin\,2\theta$

$z^3=cos\,2\theta-i\,sin\,2\theta$

$z^4=cos\theta-i\,sin\theta$

$z^5=1$ より $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ なので

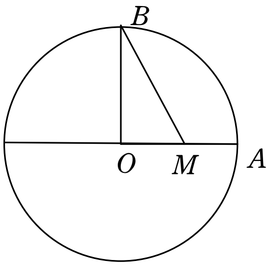
$(z+z^4)+(z^2+z^3)=-1$

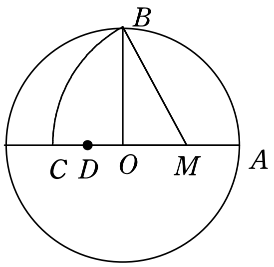
$2cos\theta+2cos\,2\theta=-1$

$4cos^2\theta+2cos\theta-1=0$　　よって $cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(2)　$cos\,72°$ の作図

①　三平方の定理





手順１　半径１の円と、OA，OB（$\angle AOB=90°$）を描く

手順２　OA の中点 M をとる　このとき $OM=\dfrac{1}{2}$ なので

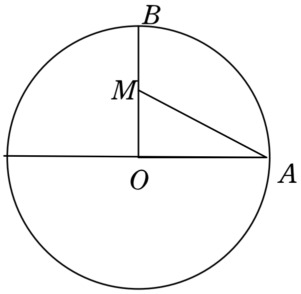
$$BM=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

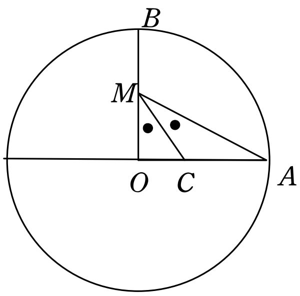
手順３　M を中心として半径 MB の円を描き、直線 OA との交点を C とする

このとき $OC=MC-OM=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

手順４　OC の中点 D をとる。このとき $OD=\dfrac{1}{2}OC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　（$cos\,72°$）

②　角の二等分線





手順１　①と同じ

手順２　OB の中点 M をとる　このとき $OM=\dfrac{1}{2}$，$AM=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

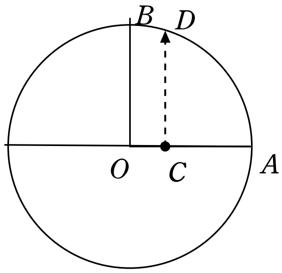
手順３　$\angle OMA$ の二等分線 を引き、OA との交点を C とする。

このとき、$OM:AM=OC:CA$ がいえるので

$$OC=OA\times\frac{OM}{OM+AM}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\quad (cos\,72°)$$

(3)　半径１の円に内接する正５角形の作図

①　$cos\,72°$ の利用

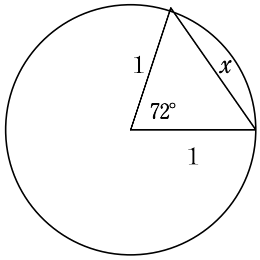


手順１　(2)の方法で$OC=cos\,72°$ となる C をとる

手順２　OA に垂直な線を引き、円との交点を D とする。

このとき AD が1辺となる。

②　余弦定理の利用



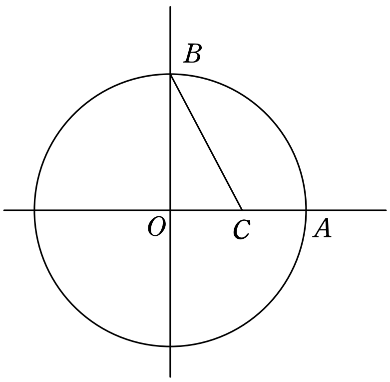
$cos\,72°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ を利用して、正5角形の1辺の長さ x を求める。

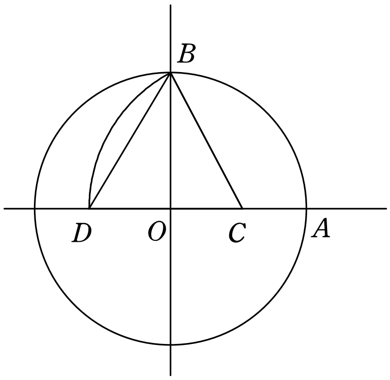
余弦定理より

$$x^2=1^2+1^2-2cos\,72°=2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

よって $x=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

この値は次の手順で作図できる。





手順１　OA の中点 C をとる

手順２　C を中心として半径 CB の円を描き、直線 OA との交点を D とする

このとき$OC=\dfrac{1}{2}\,,CB=CD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって $OD=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

ここで BD の長さを考えると

$$BD=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

BD は正５角形の1辺の長さを表していることがわかった。この作図が早い。

(4)　$x^5=1$ の解

(1)の③でわかるように、$x^n-1=0$ の n 個の解は $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ とおける。このとき α の実部が、正 n 角形の中心角の余弦を表すので、$x^n=1$ が根号（ルート）のみで解けるとき、つまり2次方程式の繰り返しによって解けるときに正 n 角形は作図可能となる。

①　相反方程式

$x^5=1$ より　$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

ここで　$\alpha=cos\dfrac{2\pi}{5}+i\,sin\dfrac{2\pi}{5}$ を求める。

$\alpha\fallingdotseq 1$ なので　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$　明らかに $\alpha\fallingdotseq 0$ なので、両辺を α^2 で割って

$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0 \quad 整理して \quad \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1=0$$

$t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ とおくと、$t^2+t-1=0$　よって $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=Re(\alpha)=2cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ なので　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって α は、2次方程式　$\alpha^2-t\alpha+1=0$ の解である。

$$\alpha=\frac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$$

$Re(\alpha)>0$ なので　$\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}+\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$

②　解と係数の関係

$\beta=\alpha+\alpha^4, \gamma=\alpha^2+\alpha^3$ とおくと、

$\beta+\gamma=\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3=-1$

$\beta\gamma=\alpha^3(1+\alpha^3)(1+\alpha)=\alpha^3(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)=-\alpha^5=-1$

解と係数の関係から β, γ は2次方程式

$t^2+t-1=0$ の解である。　すなわち　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\beta>0, \gamma<0$ なので、$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

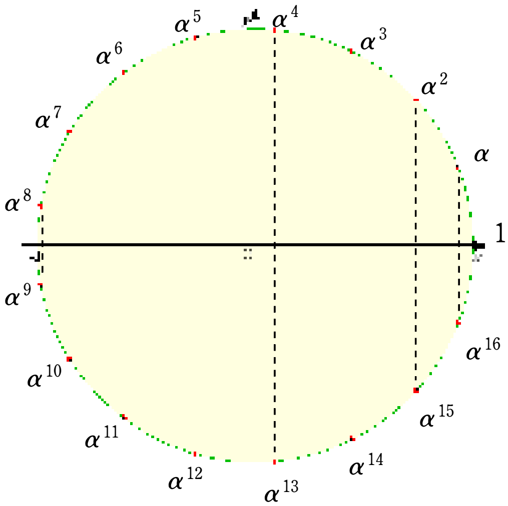
$\beta=\alpha+\alpha^4$ より　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\beta$　よって、$\alpha^2-\beta\alpha+1=0$

$$\alpha=\frac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$$

①と②は本質的に同じであるが、正17角形の作図では②の手法で考えるのであえてとりあげてみた。

2　正17角形の作図

(1)　$x^{17}=1$ を解く方針



$x^{17}=1$ の17個の解を$\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{16}\}$ とおくと、図のように、1を除いた16個の解は、x 軸に関して対称に配置されている。つまり、8組の共役な複素数になっている。

方程式の解法の方針は、1－(4)②で行った解と係数の関係を用いる。

すなわち、まず1を除いた16個の解を8個ずつの2組の解の和にして、それらの値を解と係数の関係により求める。次に、その8個を4個ずつの和にしてそれらの値を求め、更にその4個を2個ずつの和にしてその値を求める、というように解と係数の関係を順次繰り返すことにより、2次方程式を4回用いて解を求める。

2次方程式の解（の実部と虚部）は定規とコンパスで作図可能なので、上のような手法で解が求まった場合、正17角形は作図可能となることがいえる。

この手法で考えると、解の個数が次々半減し最後に2個になるので、$x^n=1$ が根号のみで求められるためには、 $n-1=2^k$ すなわち、$n=2^k+1$ の形で書かれていなければならない。

では、最初に解の集合$\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{16}\}$ から1を除いた16個を8個ずつに分けよう。２つの組を β_1, β_2 とする。$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{16}=0$ なので、どのように８つずつに分けても$\beta_1+\beta_2=-1$ となるのであるが、β_1, β_2 とも実数でなければ、次の2次方程式が実係数方程式にならない。従って、16個の解を4組の共役のペアに分けると
β_1, β_2 がともに実数となり次の2次方程式へとつなげることができる。

今、β_1, β_2 を、図のように4組の共役のペアに分ける。

$$\beta_1=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{13}+\alpha^9$$

$$\beta_2=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{12}+\alpha^{14}$$

ちなみに、$\overline{\alpha}=\alpha^{16}$ なので、$\overline{\alpha}^2=\alpha^{32}=\alpha^{15}$ ，$\overline{\alpha}^4=\alpha^{30}=\alpha^{13}$ ，$\overline{\alpha}^8=\alpha^{26}=\alpha^9$

となるので、β_1の各項は$\{\alpha^{2^n} \mid n=0, 1, 2, 3, \cdots, 7\}$ と表せる。

また、図から $\beta_1>0, \beta_2<0$ となることがわかる。

ではまず最初の2次方程式を解いてみよう。

(2) 最初の2次方程式

$\beta_1=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{13}+\alpha^9$

$\beta_2=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{12}+\alpha^{14}$　　（$\beta_1>0$，$\beta_2<0$）

とおく。$\beta_1+\beta_2=\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{16}=-1$

$\beta_1\beta_2$ の計算は面倒であるが、以下のような17を法とする指数の和の乗積表を作ればわかりやすい。

	1	2	4	8	9	13	15	16
3	4	5	7	11	12	16	1	2
5	6	7	9	13	14	1	3	4
6	7	8	10	14	15	2	4	5
7	8	9	11	15	16	3	5	6
10	11	12	14	1	2	6	8	9
11	12	13	15	2	3	7	9	10
12	13	14	16	3	4	8	10	11
14	15	16	1	5	6	10	12	13

上の結果より $\beta_1\beta_2=4(\alpha+\alpha^2+\alpha^2+\cdots+\alpha^{16})=-4$

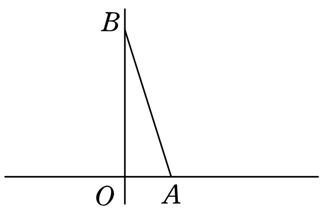
よって、β_1,β_2 は2次方程式 $t^2+t-4=0$ の２つの解である。

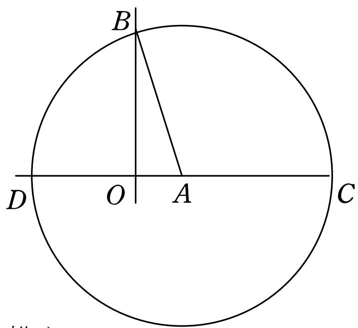
$$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$\beta_1>0,\beta_2<0$ より

$$\beta_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\qquad \beta_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

β_1 と $-\beta_2$ の長さは次のように作図できる。





手順１　$OA=\frac{1}{2},OB=2$ をとる

手順２　A を中心として半径 ABの円を描く

このとき $AB=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$　　$OC=OA+AC=\frac{1+\sqrt{17}}{2}=-\beta_2$

$OD=AD-OA=\frac{\sqrt{17}-1}{2}=\beta_1$

(2)　2番目の2次方程式

$\beta_1=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{13}+\alpha^9$ の８つの項について

$\gamma_1=\alpha+\alpha^{16}+\alpha^4+\alpha^{13}$, $\gamma_2=\alpha^2+\alpha^{15}+\alpha^8+\alpha^9$ と2組の共役のペアに分ける。

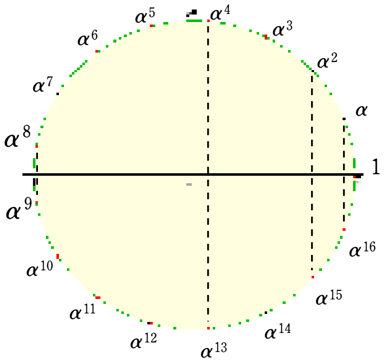
このとき

$$\gamma_1+\gamma_2=\beta_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\gamma_1\gamma_2=(\alpha+\alpha^{16}+\alpha^4+\alpha^{13})(\alpha^2+\alpha^{15}+\alpha^8+\alpha^9)=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^{16}=-1$$

参考

+	1	16	4	13
2	3	1	6	15
15	16	14	2	11
8	9	7	12	4
9	10	8	13	5



よって、γ_1,γ_2 は2次方程式　$t^2-\beta_1t-1=0$ …※　の解である。

また、図から　$\gamma_1=(\alpha+\overline{\alpha})+(\alpha^4+\overline{\alpha^4})>0$

$\gamma_1\gamma_2=-1<0$ から　$\gamma_2<0$ がいえる。

※を解くと　$t=\dfrac{\beta_1\pm\sqrt{\beta_1{}^2+4}}{2}$ すなわち　$\gamma_1=\dfrac{\beta_1+\sqrt{\beta_1{}^2+4}}{2}$, $\gamma_2=\dfrac{\beta_1-\sqrt{\beta_1{}^2+4}}{2}$

ここで、$\sqrt{\beta_1{}^2+4}=\sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2+4}=\sqrt{\dfrac{34-2\sqrt{17}}{4}}=\dfrac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{2}$

となるので

$$\gamma_1=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\ ,\ \gamma_2=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$ を得る。

$\beta_2=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{12}+\alpha^{14}$　についても同様に考える。

$\gamma_3=\alpha^3+\alpha^{14}+\alpha^5+\alpha^{12}$, $\gamma_4=\alpha^6+\alpha^{11}+\alpha^7+\alpha^{10}$　と分けると

$\gamma_3+\gamma_4=\beta_2$, $\gamma_3\gamma_4=-1$　がわかるので、

γ_3,γ_4 は2次方程式　$t^2-\beta_2t-1=0$ の解である。

また、「α^3 の実部＞α^5 の実部」が明らかなので、$\gamma_3>0,\gamma_4<0$ がいえる。

よって、$\gamma_3=\dfrac{\beta_2+\sqrt{\beta_2{}^2+4}}{2}$, $\gamma_4=\dfrac{\beta_2-\sqrt{\beta_2{}^2+4}}{2}$

ここで、$\sqrt{\beta_2{}^2+4}=\sqrt{\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2+4}=\sqrt{\dfrac{34+2\sqrt{17}}{4}}=\dfrac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{2}$

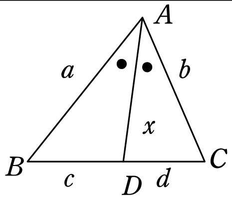
となり、

$$\gamma_3=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\ ,\ \gamma_4=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$ を得る。

(3) r_1 の作図　その１

$r_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$ の作図、とりわけ$\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ の作図について考えてみよう。まず、次の定理を準備する

【定理】



図において AD が $\angle A$ の二等分線のとき
$AD=x$ とすると
$x=\sqrt{ab-cd}$

証明　AD は $\angle A$ の二等分線なので　$a:b=c:d$　よって　$ad=bc$ …※

余弦定理より

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{a^2+x^2-c^2}{2ax}=\frac{b^2+x^2-d^2}{2bx}$$

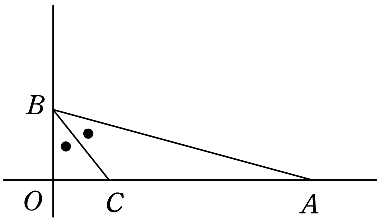
整頓して　$a^2b+bx^2-bc^2=ab^2+ax^2-ad^2$

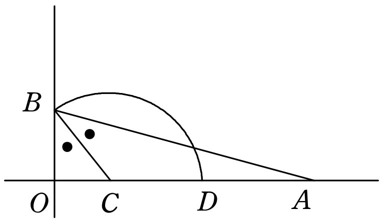
$(b-a)x^2=ab^2-a^2b-ad^2+bc^2$

ここで、※より　$ad^2=bcd\,,bc^2=acd$ なので

$(b-a)x^2=ab(b-a)-cd(b-a)$　$\therefore x^2=ab-cd$　$x=\sqrt{ab-cd}$　終

これを利用して次のような手順で求める。





手順１　$OA=4\,,OB=1$ をとる。このとき $AB=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

手順２　$\angle B$ の二等分線を引き、OA との交点を C とする。

このとき、$OC:CA=OB:AB=1:\sqrt{17}$ より

$$OC=\frac{4}{1+\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}\qquad CA=4-\frac{\sqrt{17}-1}{4}=\frac{17-\sqrt{17}}{4}$$

ここで上で述べた定理を用いると

$$BC=\sqrt{1\cdot\sqrt{17}-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\cdot\frac{17-\sqrt{17}}{4}}=\sqrt{\frac{16\sqrt{17}-18\sqrt{17}+34}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

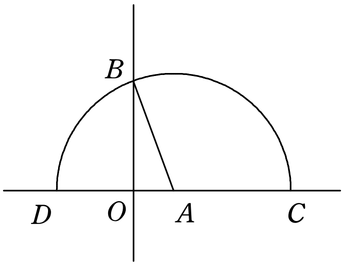
手順３　C を中心として半径 CB の円を描き、OA との交点を D とする。

$$このとき、OD=OC+CD=\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}=r_1$$

(4) r_1 の作図　その２

$$1+\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)^2=\frac{34-2\sqrt{17}}{16}$$

$$1+\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2=\frac{34+2\sqrt{17}}{16}$$ に着目すると次のように簡単にr_1を作図することができる。



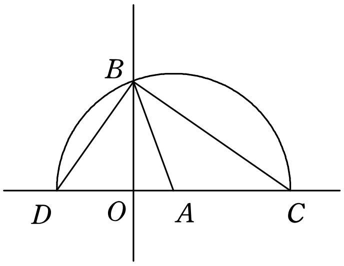
手順１　$OB=1\,,OA=\dfrac{1}{4}$ をとる

このとき $AB=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

手順２　A を中心に半径 AB の円を描く

$OC=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

$OD=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$　となる



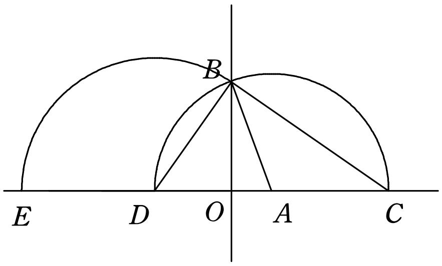
このとき

$BC^2=1+\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2=\dfrac{34+2\sqrt{17}}{16}$

$BC=\dfrac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$

また、$BD^2=1+\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2=\dfrac{34-2\sqrt{17}}{16}$

$BD=\dfrac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$



手順３　D を中心として半径 BD の円を描く

このとき $OE=OD+DE=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+\dfrac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}=r_1$

(5)　3番目の2次方程式

$\gamma_1=\alpha+\alpha^{16}+\alpha^4+\alpha^{13}$, $\gamma_2=\alpha^2+\alpha^{15}+\alpha^8+\alpha^9$ について(2)と同様に行う。

まず　$\gamma_1=\alpha+\alpha^{16}+\alpha^4+\alpha^{13}$　において　$\delta_1=\alpha+\alpha^{16}, \delta_2=\alpha^4+\alpha^{13}$ と分ける。

このとき　$\delta_1+\delta_2=\gamma_1=\dfrac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

$$\delta_1\delta_2=(\alpha+\alpha^{16})(\alpha^4+\alpha^{13})=\alpha^5+\alpha^{14}+\alpha^3+\alpha^{12}=\gamma_3=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

よって、δ_1 , δ_2 は2次方程式　$t^2-\gamma_1 t+\gamma_3=0$ …※　の解である。

(2)の円分の図からわかるように、$\delta_1>0 , \delta_2>0$　$\delta_1>\delta_2$ である。

※を解くと　$t=\dfrac{\gamma_1\pm\sqrt{\gamma_1{}^2-4\gamma_3}}{2}$　　$\therefore\delta_1=\dfrac{\gamma_1+\sqrt{\gamma_1{}^2-4\gamma_3}}{2} , \delta_2=\dfrac{\gamma_1-\sqrt{\gamma_1{}^2-4\gamma_3}}{2}$

では頑張ってδ_1 を求めてみよう。

$$\gamma_1{}^2-4\gamma_3=\left(\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)^2-4\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$=\frac{52-4\sqrt{17}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

$$=\frac{68+12\sqrt{17}+2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$$

ここで $2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ を次のように変形する

$$2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}=2(\sqrt{17}+1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$=2\sqrt{(\sqrt{17}+1)^2(34-2\sqrt{17})}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$=2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$=4\sqrt{(9+\sqrt{17})(17-\sqrt{17})}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$=4\sqrt{136+8\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}=8\sqrt{34+2\sqrt{7}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

よって　$\gamma_1{}^2-4\gamma_3=\dfrac{68+12\sqrt{17}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-8\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$

$$\therefore\delta_1=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}+\frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$$

$$=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$

(6)　最後の2次方程式そして$cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値

(5)で δ_1 が求まったので、$\delta_1=\alpha+\alpha^{16}$ から2次方程式

$t^2-\delta_1 t+1=0$ …※　を解けば念願のαを求めることができる。

この方程式を解くのは気が重いのであるが、我々が求めたのは α の値ではなく、

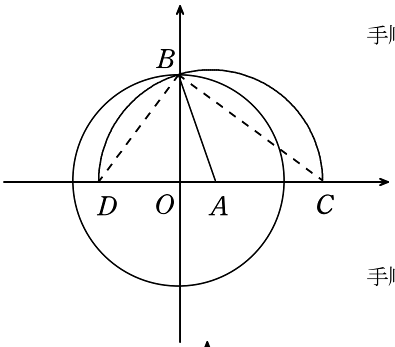
$cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値なので、わざわざ※を解く必要はない。

$\delta_1=\alpha+\alpha^{16}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\,cos\dfrac{2\pi}{17}$ なので(4)の結果より$cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値が得られる。

$$cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$

(7)　正17角形の作図（しもまっちもんど（笑））

では最後に正17角形の作図に挑戦してみよう。



手順１　半径１の円 O を描き $OA=\dfrac{1}{4}$, $OB=1$ をとる。

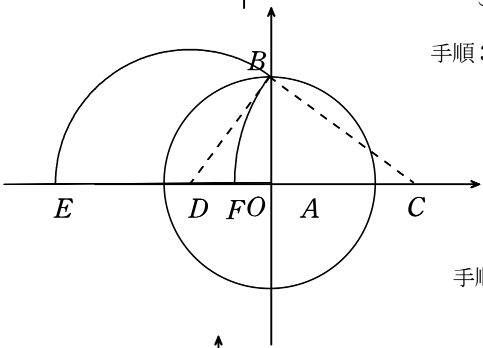
このとき

$$AB=\frac{\sqrt{17}}{4}\qquad BC=\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$BD=\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

手順２　A を中心として半径 AB の円を描く。

このとき $OC=\dfrac{\sqrt{17}+1}{4}$　$OD=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$



手順３　D を中心として半径 BD の円を描く。

C を中心として半径 BC の円を描く。

このとき　$OE=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+\dfrac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

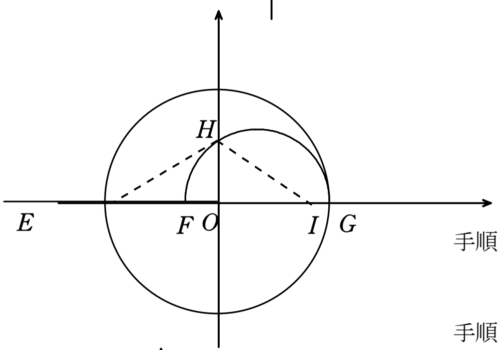
$$OF=\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}-\frac{\sqrt{17}+1}{4}$$

手順４　FG を直径とする円を描く。

このとき、方べきの定理より

$$OH^2=OF\cdot OG=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$OH=\frac{\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{2}$$



手順５　$HI=\dfrac{1}{2}OE=\dfrac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

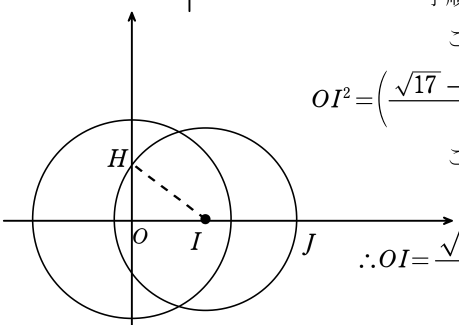
となる I をとる。

手順６　I を中心として半径 IH の円を描く

このとき $OI^2=IH^2-OH^2$

$$OI^2=\left(\frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}\right)^2-\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

これは(5)の $\gamma_1{}^2-4\gamma_3$ の値である。



$$\therefore OI=\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{4}$$

$$OJ=\frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}+\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{4}$$

これは(5)の δ_1 の値である。

手順６　OJ の中点 M をとる。このとき $OM=cos\dfrac{2\pi}{17}$ が得られるので、M から x 軸に垂線を立てて、それが円と交わる2点が正17角形の頂点となる（図省略）。