# 10月21日の授業覚書

先日は授業を見せていただきありがとうございます。私が指導主事をしていた時のことですが、授業参観を行った先生に「個別訪問の所感」というテキストを作ってフィードバックしておりました。内容は、授業手法の指導ではなく、主に教材研究ネタや数学的トピックスを中心とした話題の提供でした。

今回、A 先生と B 先生の授業を参観して、久しぶりに「所感」としてをまとめてみようと思いペンをとりました。少しでも参考になれば幸いです。

## ■ A 先生の授業

A 先生の授業では特に以下のような点が印象に残りました。

①冒頭のチェックテストを、前時の学習課題の定着状況を見るだけではなく、本時の授業の展開に活かす内容にしていたこと。
②グーグルフォームによるリフレクションを習慣化していること。
③ICT を単なる描画機能として使うのではなく、試行錯誤的操作活動から発見的な学びを得るツールとして利活用されていたこと。
④操作によって理解したことを自分の中で言語化し、さらに他者に説明する活動を取り入れて進めていたこと。

まず①②について補足します。先生は日々の授業を、単発ではなく連続的に、つまり「前時、本時、次時」のシリーズとしてリレーションされていることが素晴らしいと感じました。ちなみに本時は、$f(x,y)+kg(x,y)=0$ が $f(x,y)=0$ と $g(x,y)=0$ をの交点を通る曲線群（本時の場合は円束と根軸）になることの理解が主題ですが、前時での、連立方程式によって２次の項を消去した式と連動させ、その式に意味を与えるという形で授業を展開されていることが良いと思いました。

また、「『通る』⇒『代入できる』」から「『代入できる』⇒『通る』」と逆の見方をすることで、今後学ぶであろう、円外の点から引いた２接線の接点を結んだ直線（極線）㊟1 や、パラメータを含むグラフの方程式㊟2 へ自然に展開されていくように思います。特に、ハイレベルの生徒には、東大など超難関大に頻出の「通過領域・存在範囲」の問題にもチャレンジさせたり、探究的な活動などで、より深い学びを求める生徒へは、本時の内容の背景にある射影幾何学の研究を示唆してみてもいいかもしれません。（㊟１・㊟２は後述）

次に③④について補足します。今年の１月に「令和の日本型学校教育の構築を目指して」という中教審の答申があり、その中で「個別最適な学び」という言葉が大きくクローズアップされています。これは、教育のデジタル化とも関連していく内容です。そのような流れの中で、今後授業の中でデジタルコンテンツが使われることが多くなると予想されるわけですが、それをビジュアルインパクトのためとか、単なる便利ツールとして扱われることに私は不安を抱きます。現在、生徒がスマホをどう活用しているかを聞くと「動画視聴」「音楽視聴」など「～してもらう」という受動的な活用がほとんどです。本来、テクノロジを用いた教育は生徒の主体性を育てることが目的ではないかと思うのですが、逆に ICT のツールが生徒を受動化する装置として機能しているとすれば本末転倒のように思います。さて、前置きが長くなりましたが、そんな中、先生のデジタルコンテンツの取り入れ方は、発見的な学びを得るためのツールとして用いられていました。数学の問題解決は、正しい前提から出発し結論に向かう「演繹的手法」だけではありません。いくつかの具体例から一般化を考える「帰納的手法」（Induction）、あることがらと似ている構造に注目する「類推」（Analogy）、問題の状況から適合しそうな仮説を立てる「仮説設定」（Abduction）という考え方を組み合わせて問題解決をしていくことが、特に「共通テスト」時代の問題解決のためのストラテジーになります。今回の先生の授業では、帰納的に考え、類推し、仮説を立てると

いう、思考を促進するツールとしてデジタルコンテンツを活用されていて、とても良かったと思いました。また、「個別最適な学び」は、それによって多様性や協働性の喪失につながることがないように注意しなければならないわけですが、先生は、個別に機器に向かった後に、理由を言語化する活動、さらにペアによる学び合いを取り入れていたこともたいへん素晴らしいと思いました。

それでは、以下に今回の授業に関連する数学的な話題やトピックスについてまとめてみたいと思います。

**【極と極線の方程式（㊟１）】**

円外にある点から、円に引いた接線の方程式を求める問題は、公式一発で求めることはできません。例えば、「円$x^2+y^2=5$に、点$(6,3)$から引いた接線を求めよ」などという問題に対して、円上の点における接線の公式を不用意に適用させて、$6x+3y=5$としてしまう答案によくめぐり合います。

もちろんこの解答は間違いですが、この直線$6x+3y=5$に何か意味はないか考えてみたいと思います。

円$x^2+y^2=5$には、点$(6,3)$から２本の接線が引けるので、それぞれの接点の座標を$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$としましょう。

すると、２つの接線の方程式は

$$\begin{cases} x_1x+y_1y=5 \cdots ① \\ x_2x+y_2y=5 \cdots ② \end{cases}$$ とおけます。

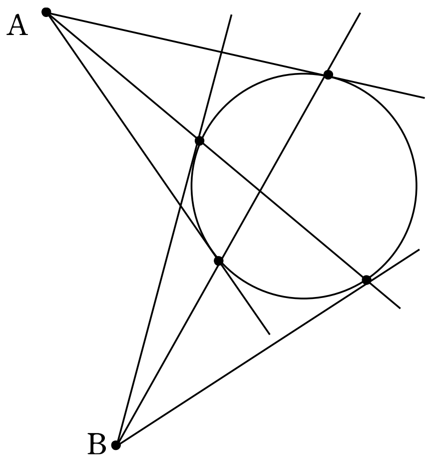
ここで、①②はともに$(6,3)$を**「通る」**ので、$x$に６、$y$に３を**「代入」**できるから、

$$\begin{cases} 6x_1+3y_1=5 \cdots ③ \\ 6x_2+3y_2=5 \cdots ④ \end{cases}$$

すると、③④から、直線 $6x+3y=5$ は$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$を通ることがわかります。

つまり、$6x+3y=5$ は円 $x^2+y^2=5$ 円の、２つの接線の接点を結ぶ直線であることがわかります。

このような直線を極線、点$(6,3)$を極といいます。極は、いわば射影の中心で、極の動きに連動して極線が変化します。例えば、極Ａの極線上の点Ｂを極として極線を考えると、それは、Ａを通るという面白い性質もあります（下図参照）。




極、極線は射影幾何の基礎となるとても重要な概念です。Geogebra などの幾何ソフトで描画し、納得しながら新たな発見を得ていくことが、まさに、デジタル機器を用いて行う個別最適な学びの真骨頂ともいえるかもしれません。

**【パラメータを含むグラフの方程式（㊟2)】**

例えば、既習事項と思われる、傾きが$k$で、$(x_1,y_1)$を通る直線の方程式 $y-y_1=k(x-x_1)$ は、見方を変えて、$(y-y_1)-k(x-x_1)=0$とすれば、２直線$y=y_1$, $x=x_1$ の交点を通る直線群（線束）と考えられます。つまり、１次のパラメータを含む直線は定点を通る直線群（ワイパー型）と見ることができるということですね。

このようなパラメータを含むグラフの方程式は、グラフ描画ソフトを用いて動的に見ることで、納得感をいだいたり、発見的な学びに結びつけられればいいのではないかと思います。

では、２次のパラメータを含む場合はどうなるでしょう。１年生にはまだ早い内容かもしれませんが、研究会でも少しだけ話しましたので、おまけとして、ここでも少し触れておきたいと思います。次のような３つの例題を作ってみました。

**【例題１】**

$y = kx - k^2$（$k$ は実数の定数）において次の問いに答えよ。

⑴　この直線は $(1\,,\,-1)$ を通るか。

⑵　この直線は $(1\,,\,2)$ を通るか。

⑶　この直線の通過領域を図示せよ。

**【例題２】**

$s\,,\,t$ を正の実数の定数とする。
直線 $s^2y - stx + t^2 = 0$ の通過領域（存在範囲）を図示せよ

**【例題３】**

$s\,,\,t$ が $s^2 + t^2 = 1$ を満たす実数の定数とするとき，直線 $y = (s+t)x - 1 - 2st$ の通過領域（存在範囲）を求めよ。

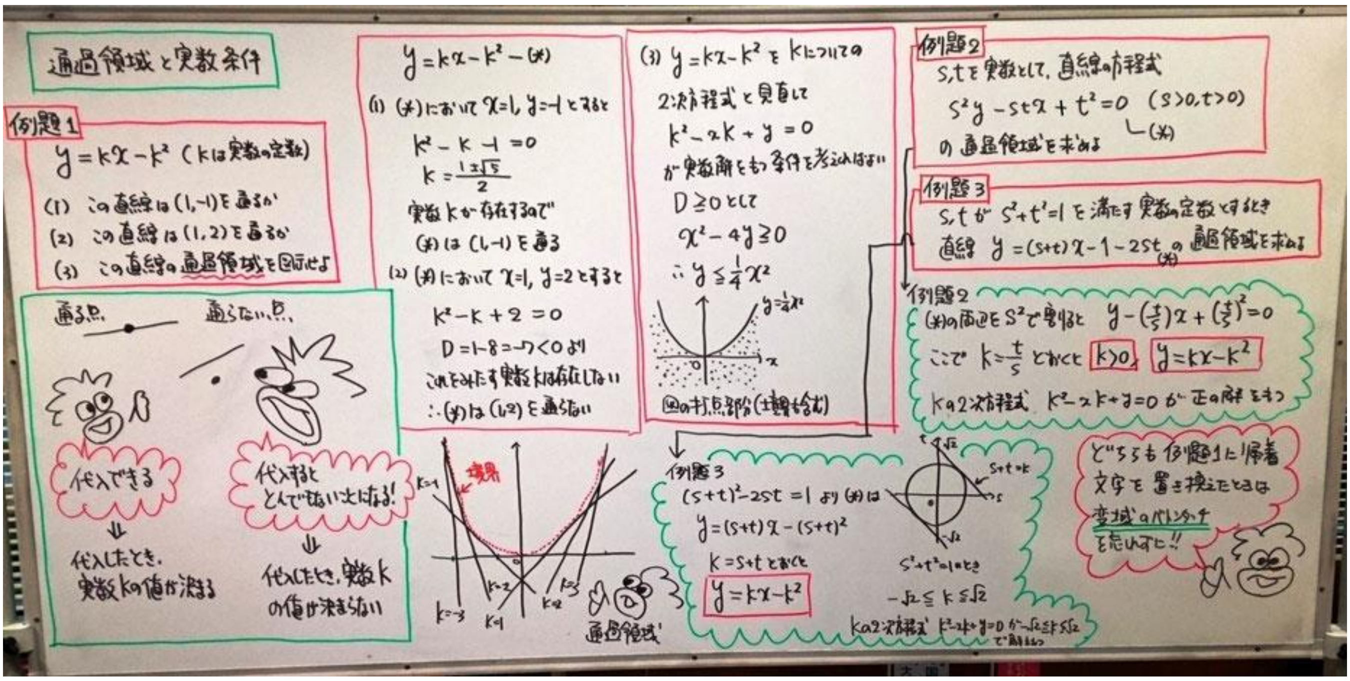
実はこの３つの例題は形は違いますが、どれも同じ問題になります。

まず例題１を丁寧に説明します。ポイントは「通る点」と「通らない点」に対する考え方です。「通る点」は「代入することができる」ということですね。では「通らない点」はどうでしょう。もちろん「代入することができない」と言ってもいいのですが、私は「代入すると大変なことになっちゃう」と説明しています。

通る点ならば、代入したときにパラメータが実数の値を返してくれるのに対し、通らない点を代入すると、パラメータが実数の値を持たないということになります。つまり、通過領域（存在範囲）は通る点を代入したときにパラメータが実数の値を持つ条件を考えればいいということになります。因みにパラメータが２次である場合は、２次方程式に帰着するので判別式を使うことになりますね。

ということで、上の３つの問題を解説した板書を以下にあげておきます。ご覧ください。

これをウォーミングアップとして、東大などの本格的な問題にチャレンジしてくれる生徒が現れればいいですね。



## 【円の図示の小技】

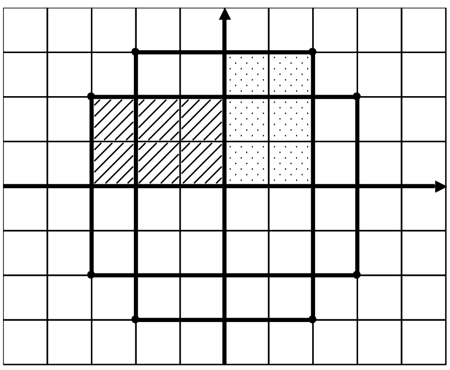
過去のセンター試験などの様々な入試問題の中に出てくる円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ において、$r^2$の値をいろいろ調べてみると、もちろん、1,4,9,16などの平方数になっていることが多いのですが、実は、5,13,17,10 なども結構目にします。一方、3 , 7 , 11 といった数はあまり見かけません。一般に$4n+3$型の素数（とその倍数）は平方和に分解することができません。逆に、$4n+1$ 型素数（とその $4n+3$ 型素数倍数以外の倍数）は、次のように平方和に分解できます。

$5=1^2+2^2$　$10=1^2+3^2$　$13=2^2+3^2$

$17=1^2+4^2$　$20=2^2+4^2$　$34=3^2+5^2$

問題を作る背景にはこのような事情あるわけです。であれば、平方和を見つけて、円を作図するガイドにするのも一つの手だと思います。

例えば、$x^2+y^2=13$ だったら、頂点が原点に重なるような２×３、３×２の長方形を全部で８個描いて、その頂点を結んでいけばうまく作図できますね（下図）。



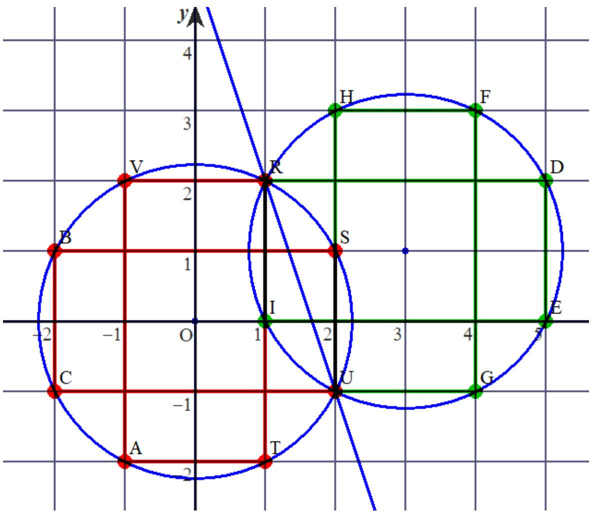
例えば、先生の授業の復習問題は

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

という２つの円の共有点の座標を求めるというものでした。これを

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ③ \\ (x-3)^2+(y-1)^2=5 & \cdots ④ \end{cases}$$ とすれば

どちらも半径が $\sqrt{5}$ の円になるわけですが、$5=1^2+2^2$　に注意して図示すると次のようになります。



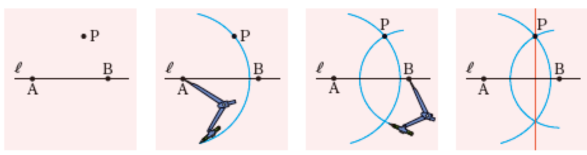

この図から、計算をしなくても共有点の座標と、２つの共有点を通る直線の方程式の傾きと切片も瞬時に知ることができます。あっけない話ですが、これも数学的な考え方の良さでもあります。

従来のセンター試験の図形の問題は、実はこのように計算せずに答えを求める問題がとても多く、真面目に「演繹的な思考」だけで問題解決すると損をします。このように、問題を普通に解いた後、こんな図示をして「遊んでみる」ことも、必要ではないかと思います。

## 【根軸と根心と地震の震源地】

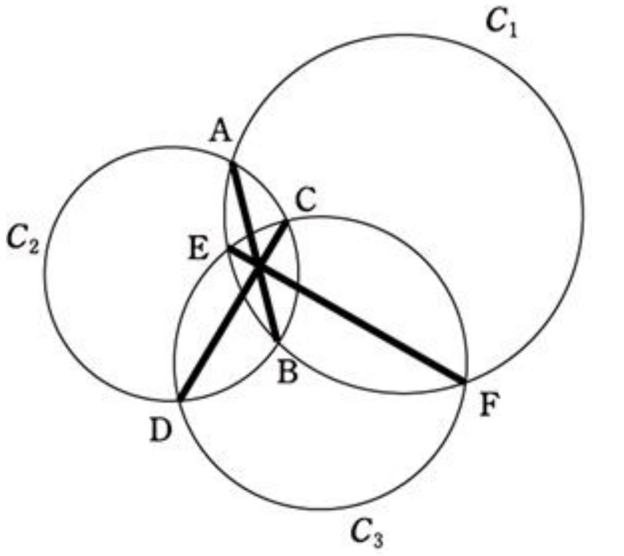
最後に研究会で触れた日常との関連（地震の震源地）の話題について述べておきたいと思います。

その話に進む前に、「２つの円の交点を通る直線」のルーツを考えてみます。おそらく中学校１年生で扱われている、定点から定直線に垂線を下す作図がルーツになるのではないでしょうか。




この作図や、垂直二等分線の作図なども、このタイミングで振り返ってみるのもいいかもしれませんね。

では本題に入ります。次ページ図のような３つの交わる円を考え、２つずつの円の共通弦を描いてみましょう。




すると、３つの弦は１点で交わります。このとき、直線 AB、CD、EF を根軸、３つの根軸の交点を**根心**と呼びます。

１点で交わることは、初等幾何的には方べきの定理（とその逆）によって証明することができますが、ここでは、今回の授業で学んだ方法を使ってみることにしましょう。

今、円$C_1, C_2, C_3$を表す図形の方程式をそれぞれ$f(x,y), g(x,y), h(x,y)$とし、更に簡単に、$f, g, h$と表すことにしましょう。

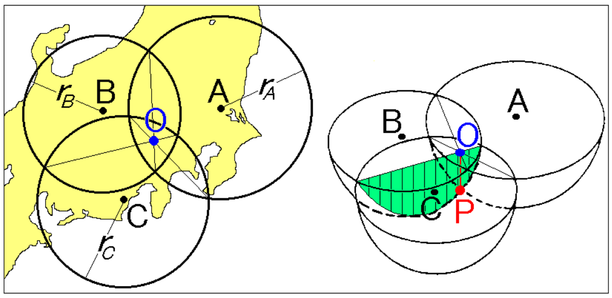
すると、直線 AB の方程式は　$f-g=0$
直線 CD の方程式は　$g-h=0$、直線 EF の方程式は、$h-f=0$ と表せます。

このとき、$(f-g)+(g-h)=0$は AB と CD の交点を通る直線ですね。ところが、この式はＥＦの直線の式と同じになるので、ＥＦはＡＢとＣＤの交点を通る直線であることがわかります。

このエレガントな証明にビビッと来ると、数学のレベルは一つ上がるのではないかと思います。

ここで示した「交わる３円の３つの弦は１点で交わる」という性質を使って、地震の震源地を特定することができます。

まず、地震によるＰ波とＳ波の到達時間から震源までの距離が測定できます（雷がピカッとなってからゴロゴロが来るまでの時間を調べるのと同じ原理)。すると、震源地は空中にはないので、観測値を中心とする半球上にあることがわかります。これを３か所で行えば，その３球の交わりが震源地（下図右のＰ地点）とわかります。




３つの球を平面で切ったとき、上図左のようになっていますが、３つの円の共通弦はただ１点で交わるのでしたから、この共有点が震源地の真上にある点（震央と呼びます）ということになります。震源の深さ OP は、三平方の定理か方べきの定理ですぐに求めることができます。

（現在は加速度の考えから１観測地点から震源までの距離を出すらしい）

私が指導主事をしていた頃、岩手県では基礎力確認調査を実施していたのですが、そのアンケートを見ると、「数学は役に立つ」と回答している生徒が非常に少ない状況がありました。

ですので、例えば、地震の震源地を求める際にも、このように数学が使われているということ、つまり数学の有用性について数学科教師は様々な機会を捉えて示すことも必要ではないかと思います。

## ■　B先生の授業

先生は、数学に苦手意識を持つ生徒が多いクラスの授業公開を敢えて行われ、授業後の研究会では、ご自身の授業改善のために虚心坦懐に学ぼうとされている姿が印象的で、好感を抱きました。

まず、授業の雰囲気から、先生と生徒の間に信頼関係が築かれていることがよくわかりました。能力別編成は、往々にして上位層の伸びの方にフォーカスしがちです。しかし、その一方、下位層の生徒には「デバイドされた」という意識が働き、自己高揚感、自尊感情を損なわれ、パフォーマンスが低下していく可能性もあります。そのような想像力を働かせ、彼女らをどのようにエンカレッジしていくか、寄り添っていくかが、習熟度別・グレード制といった多様性を排除した授業を行った教師集団が負うべき責任であると思います。

そういう意味で、先生は、本時の目標に進む過程で、既習事項を丁寧に確認しながら、数学が不得意である生徒達たちへの温かい目線を持ち、全員を「わかる」に導いていく「わかって楽しい授業」を展開されていました。

また、生徒の不完全な応答や意味不明のつぶやきに対しても、きちんと向き合って、納得するまで対話していくという姿勢があってとても感心しました。

今後もその若さとバイタリティで楽しい授業を乙女たちとともに作り上げていってください。

私も現在高校で最下層に分けられたクラスを担当していますが、中には四則も怪しい生徒もおります。ただ、そのことによって授業やり方、コンテンツの開発、人間関係の構築などについてより工夫をしようという思うようになり、教師として成長できたのかもしれないとも思っています。

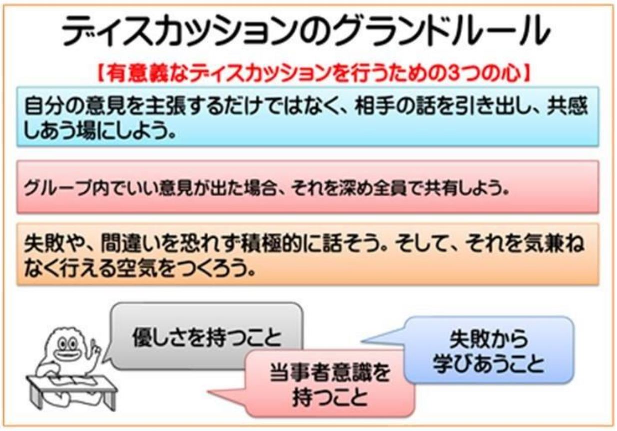
研究会で少しだけ話しましたが、私が行っていることのいくつかを以下に示したいと思いますので、参考にしていただければ幸いです。

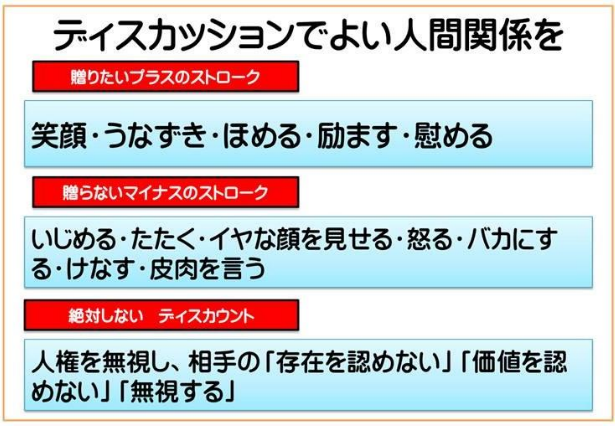
【授業開きで行うこと】

●グランドルールを決める

グループでのディスカッション、学び合いを行うのでそれを円滑に行えるような約束事を決めておきます。それをしないと、声の大きい生徒が幅をきかせるなどの、ヒエラルキーが生まれたり、授業がカオス化してしまう恐れもあります。

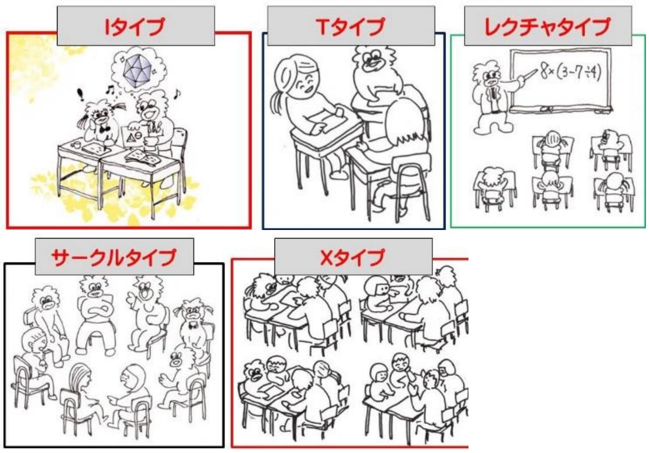
＜グランドルールの一例＞



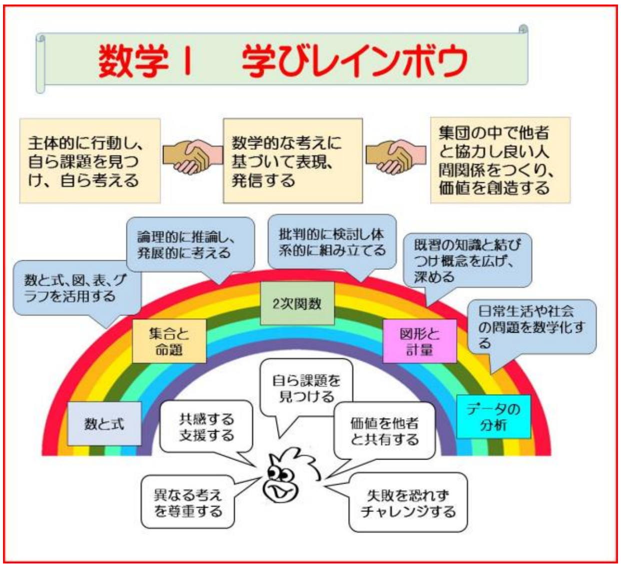

●教室のレイアウト

チョーク＆トークの講義型だけではなく、活動に応じて様々な形態で授業を行うことを示します。



## ● 何を身につけるかの概観を示す

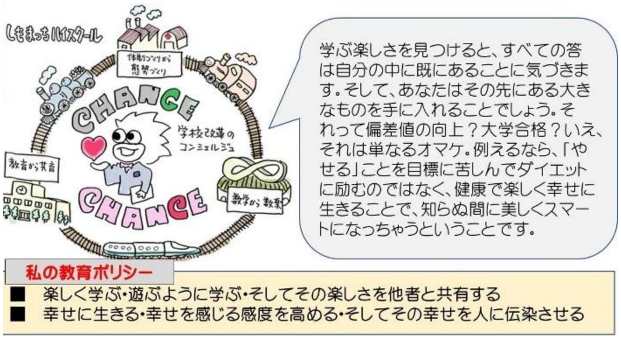
授業を通して身につけさせたい力について説明します。教科書の内容を理解するだけではなく、授業を通して数学的な見方考え方を磨き、良い人間関係を築き、自ら学ぶ姿勢を持つ、といった、高次な目標に向かっていくような話をします。





## ● 自分の教育ポリシーを伝える

自己紹介は自分のキャラクタを語るだけではなく、教育者（の端くれ）として、日ごろから考えている思いも生徒に伝えたいですね。




## ● 授業で心がけていること

①「すうがく通信」の発行

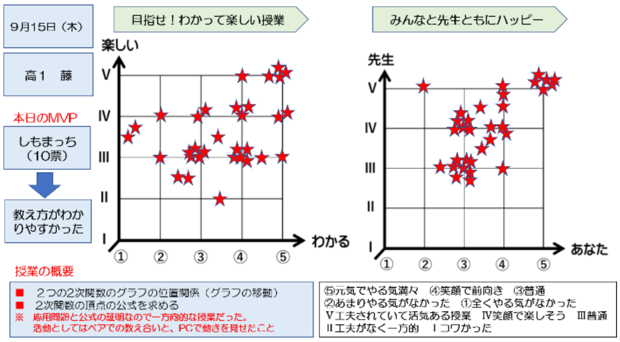
授業の様子や、授業で説明しきれなかったアドバンス的内容や数学的トピックスなどを「数学通信」にまとめて発行します。

②アイスブレイクを行う

授業の冒頭にちょっとしたアイスブレイクを行って、場をほぐしてから授業に入るようにしています。内容は、フラッシュメモリゲーム、さいころトーク、カードを使ったメタファトーク、クイズ、絵の再現ゲーム、ウミガメのスープなど多数あります。

③振り返りを毎日行う

独特の振り返りシートを使って生徒の自己評価とともに自身の授業評価を行います。




（振り返りシートのまとめの一例）

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

## ＜相加相乗平均の不等式の小ネタ＞

研究会でお話したことも含めて、相加相乗平均の不等式に関するネタを紹介します。現在のクラスに使うということではなく、あくまでも先生の教材研究用にということでご理解ください。

### 【相乗平均はどのような場面で使うのか】

いきなり「掛けてルートをとるという平均の仕方を相乗平均という」とだけ言っても、それがいったいどういう場面で使われるのか、なぜ普通の足してその個数で割る相加平均ではだめなのかという説明がないと、モチベーションがあがらず、「数学は、意味はわからないけど、とにかく先生がいった通りのやり方をなぞること」から発展し

ていきません。私は、相乗平均について次のような話題を取り上げています。

①**話題１**　平等な重みを与えたテストの平均

100 点満点のＡとＢの２つのテストで入社試験の合否を決めようと思う。どちらも重要な要素を含むテストなのでバランスのよい者を合格させたい。今、相加平均が 50 点以上の者を合格にすると、一方が 100 点、もう一方が０点でも合格できることになる。どちらも重要なテストなのでそれではマズイ。そこで、相乗平均を採用することにした。これだと一方が極端に悪い者は合格者からはずれることになる。

②**話題２**　倍数の平均

20××年に円安とインフレが進行し、物価が前年の２倍になった。翌年はそれに歯止めがかからず、前年の３倍になった。では、この２年間、平均して物価は何倍に上がったといえるだろうか。相加平均を考えて 2.5 倍とするのは間違い。例えば 100 円のリンゴは 20××年には２倍の 200 円になり、翌年はそれの３倍だから、$100 \times 2 \times 3 = 600$円となる。すると、平均の倍率を$x$とすると、$100 \times x \times x = 600$ という式が成り立つから、$x = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ となる。つまり、毎年の倍率の相乗平均ということになる。

このように、倍率を平均する場合は相乗平均が使われる。

ちなみに、速度を平均する場合は、相加平均でも相乗平均でもなく、「逆数の相加平均の逆数」である調和平均が用いられる。

例えば、120km の道のりを自動車で、往きは時速 40km、帰りは時速 60km で運転したとする。このとき往復の平均速度は相加平均の 50km ではない。往きは３時間、帰りは２時間かかったので、５時間で 240km 走行したことになるから平均時速は 240÷５＝48km/時となる。

なお、相加平均、相乗平均、調和平均には次のような関係がある。

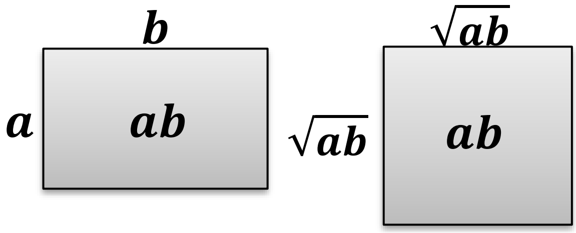
$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$（等号成立は $a=b$のとき）

③**話題３**　課外の手当て

私が初任のときに、進路指導課で課外授業の手当ての担当をしていた時の話である。１回の指導につき 1000 円を手当てにしようとしたが、担当者Ａが受け持つ生徒は 50 人で、担当者Ｂはたった２人だった。Ａは人数が多いので、指導回数が制限されるが、Ｂは人数が少ないので何度も指導を行うことができた。これを同等とみなすのは不平等の様な気がして、$\sqrt{\text{回数} \times \text{人数}}$ に対して手当てを決定する表を作ったことがある。

**【長方形の面積および周と相加相乗平均】**

先生が授業で示した面積一定（$ab$）の長方形と正方形の周の長さの比較による相加相乗平均の説明はとても面白かったですね。このとき、生徒たちは一斉に黒板を注目していました。



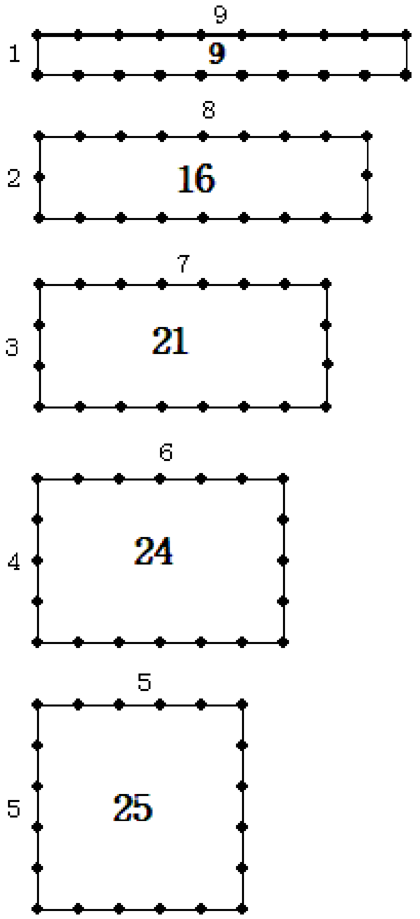

ここで $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ を示すためには、「面積一定の長方形において周の長さが最小になるものは正方形である」という原理が働いているところがポイントです。私は先生の授業を聞きながら、逆に、相加相乗平均が成り立つことを前提にして「面積一定の長方形において周の長さが最小になるのは正方形のときである」ということを示すのも面白いのではないかと思いました。

ところで、「面積一定の長方形において周の長さが最小になるのは正方形」の双対表現として「周の長さ一定の長方形において、面積が最大になるのは正方形」ということも言えます。

余談になりますが、紀元前 2000 年近くのハムラビ王の頃、つまりバビロニア時代には縄張師と呼ばれる人たちがいて、写真のような等間隔に印をつけた縄を用いて、長方形状に土地を囲み、

川の氾濫で荒れた土地の区画整理をしていたといわれています。

例えば，長さ 20mの縄の場合、図のように、いろいろな長方形を作ることができます。周の長さは同じなのに面積が異なっていますね。




縄張師達は、縦と横をかければ面積になることや、正方形のときの面積が最大になることを知っていたのですが、実はもっとスゴイ秘密を発見していました。

それは「長方形の長辺の長さから短辺の長さを引いたものの半分の２乗を長方形の面積に加えると、ちょうど正方形の面積になる」というものです。例えば、縦１横９の長方形の場合、

長辺−短辺＝８　２で割って４、これを２乗して 16。長方形の面積９に 16 を足すと確かに正方形の面積 25 になりますね！

これを一般化しましょう。長辺 $x$ 短辺 $y$ の長方形において、

$$xy+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

確かに「長方形の長辺の長さから短辺の長さを引いたものの半分の２乗を長方形の面積に加えると、ちょうど正方形の面積になる」が言えました。上の式において、左辺の第２項は０以上であることがわかるので、

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=xy+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\geqq xy \quad ※$$

が成り立ちます。つまり、相加相乗平均の不等式のルーツはバビロニア時代までさかのぼるということなんですね。

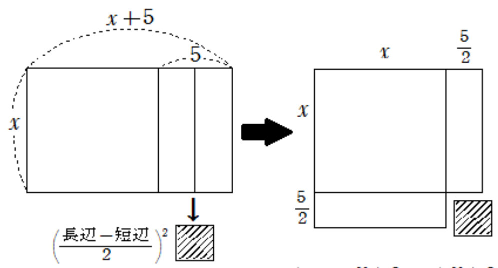
オマケとして、バビロニアの縄張り師の方法で二次方程式 $x^2+5x-7=0$ を解いてみましょう。

$x^2+5x=7$ ……7 を移行した

$x(x+5)=7$ …左辺は長辺 $x+5$ 短辺 $x$ の長方形の面積を表している

ここで、上の※式「長方形の長辺の長さから短辺の長さを引いたものの半分の 2 乗を長方形の面積に加えると、ちょうど正方形の面積になる」の考えを用いると、

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=7+\frac{25}{4}$$



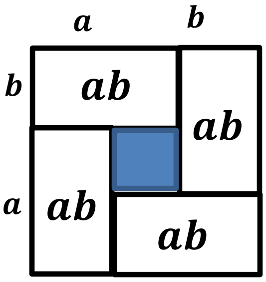

$$x(x+5)=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

この式から、$x$ を決定することができますね。つまり、解の公式のルーツも縄張り師の考え方にあるということなんですね。

## 【相加相乗平均の不等式を図形的に考える】

相加相乗平均の不等式を図形的に示す方法はたくさんありますが、ここでは３つほど取り上げてみたいと思います。

①正方形の利用




図において、面積の関係から、明らかに

$(a+b)^2 \geqq 4ab$　が言えますね。

真ん中の青い部分の面積が０のとき両者が一致するので、等号成立は $a=b$ のときであることもすぐわかります。

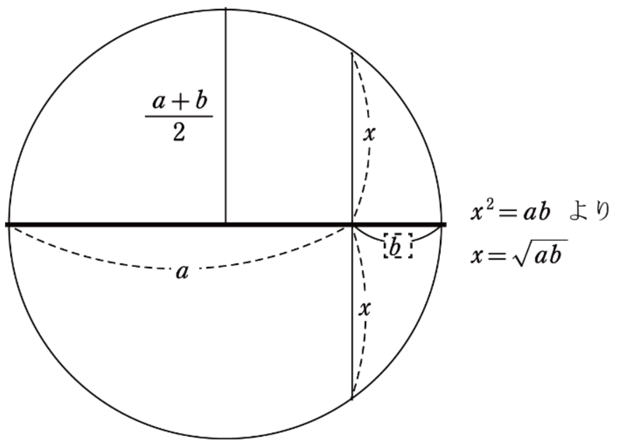
ちなみに、真ん中の青い図形は、長方形の長辺から短辺を引いた長さを１辺とする正方形なので、次のような自明ともいえる式が成り立ちます。

$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$

これは先ほどの縄張り師の式と同一のものですね。

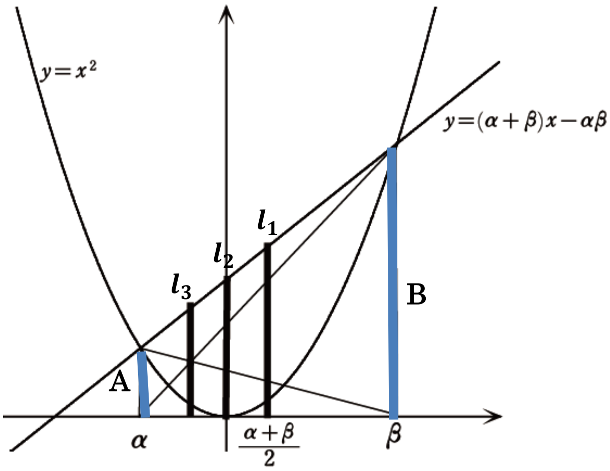
②方べきの定理

直径が $a+b$ の半円から方べきの定理を用いる方法です。これは任意の数のルートの値を作図する際に使われる手法でもありますね。




先生の授業でも余裕があれば示されようとしていましたね。

③放物線の利用




最後に私が考えたものを紹介します。図において、$l_1, l_2, l_3$ は順にＡとＢの相加平均、相乗平均、調和平均を表します。結構気に入っています。

## 【相加相乗平均の不等式は最小値の存在を保証する】

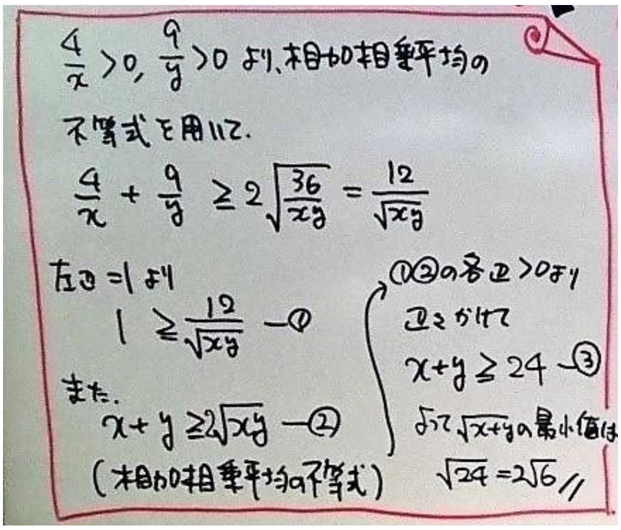
研究会でもお話したことですが、私の経験を交えながら以下に少し補足します。

以前、東大目指して浪人していた教え子のＫ君からある問題についてメールで質問されました。

それは次のような問題です。

> $x>0, y>0$,　$\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=1$　のとき $\sqrt{x+y}$ の最小値を求めよ

彼の質問は「この問題を下図のように解いたが、解答と違っていた、なぜか」というものでした。



バリバリに計算力があって、公式もたくさん覚えている彼でしたが、意外と基本的なところに穴があることがわかりちょっと驚いたものでした。

彼の解答の間違いの原因は、等号成立条件に留意していなかったことですね。つまり、③の不等式は正しいことを言っているけれど、最小値の存在を約束していない。例えば、あるクラスで数学のテストの得点が 40 点以上人は手を挙げて、と言ったら全員手を挙げたとすると、$x_n \geqq 40$ という不等式は正しいけれど最小値は 40 点とは限りません。

①②で用いた相加相乗平均の不等式はそれぞれ独立して等号成立条件があり、それが同時に成り立たないので、③の等号は成立しない。ということですね。

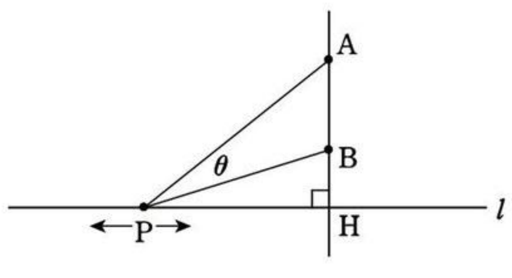
相加相乗平均の不等式とは「足して２で割ったものは掛けてルートをとったものより大きいかまたは等しい」という説明で終わっている場合が多いように思います。でも本質は、最小値の存在を約束する不等式であるということなんですね。指導する場合は、ここをもっと強調しておく必要があるのだなあと思いました。

## 【相加相乗平均の不等式とラグビーの問題】

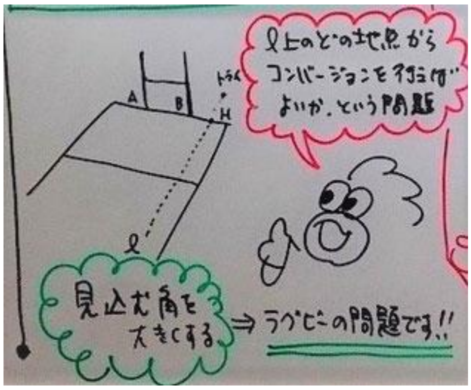
研究会でも少しだけ触れましたが、2002 年の宮崎大学の問題について取り上げておこうと思います。

図において、点Pは直線 $l$ 上のHの左側を動く。
$AH=a$ , $BH=b$ , $PH=x$ とおく。

(1) $\tan\theta$ を $a,b,x$ で表せ
(2) $\theta$ が最大になる $x$ を $a,b$ で表せ




これを見てラグビーの問題と気づく人もいるのではないでしょうか。つまり、図のＨ地点でトライが決まったとき、その後のキック（コンバージョンキック）は、直線 l 上の任意の地点から行うことができます。ＡとＢのポールの間を通せば成功ということなので、できるだけ AB を見込む角が大きいところから蹴ればいいわけです。その地点Ｐを決定する問題だったんですね。




ではまず普通に解いてみましょう。

(1)の解答

$\angle BPH=\alpha$ とおくと，

$\tan\alpha=\dfrac{b}{x}$ , $\tan(\theta+\alpha)=\dfrac{a}{x}$

加法定理より，

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$$

$$\frac{a}{x}=\frac{x\tan\theta+b}{x-b\tan\theta}$$

$\tan\theta$ について解いて，

$$\tan\theta=\frac{(a-b)x}{x^2+ab} \quad 答$$

(2)の解答

$$\tan\theta=\frac{a-b}{x+\dfrac{ab}{x}} \quad \cdots(*)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，

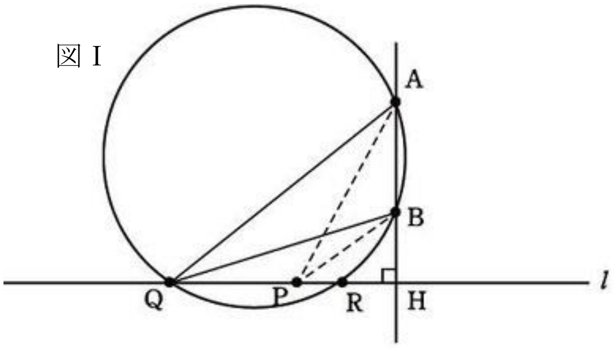
この区間で $y=\tan\theta$ は単調増加である．
よって、 $\theta$ が最大のとき $\tan\theta$ が最大となる．
つまり、(*)において，
分子の $a-b$ は正の定数なので，
(*)の分母が最小にるとき $\theta$ が最大となる．
ここで、相加平均･相乗平均の不等式より，

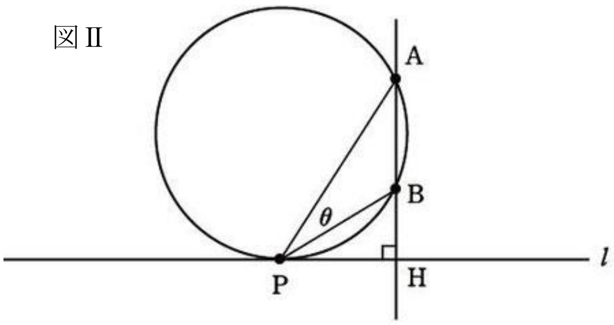
$$x+\frac{ab}{x}\geqq 2\sqrt{x\times\frac{ab}{x}}=2\sqrt{ab}$$

分母が最小となるのは上の不等式で
等号が成立するときなので，

$$x=\frac{ab}{x} \qquad よって \quad x=\sqrt{ab} \quad 答$$

得られた答えがａとｂの相乗平均になっているところが美しいですね。では、この問題を図形的に考えてみましょう。




① A,B を通る円を考える。

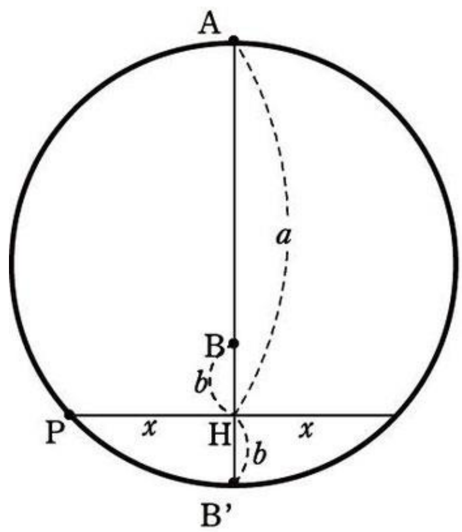
② 図Ⅰにおいて、∠AQB＜∠APB　となる。

③ よって、図Ⅱのように A,B を通り、l に接する円を描けば、その接点Ｐが$\theta$の最大値を与える点である。

ここで、$PH=x\,,AH=a\,,BH=b$　より

$x^2=ab$（方べきの定理）　すなわち、$x=\sqrt{ab}$

Ｐの位置の決定の仕方を一つ示しておきたいと思います。




まず、図において、直線$l$に対するBの対称点B′を取ります。次に、AB′を直径とする円を考えます。この円と$l$が交わった点がＰとなります。これは方べきの定理を利用して平方根の作図を行う方法です。$b=1$とすれば任意の$\sqrt{a}$ の作図ができるわけですね。

因みにこの円の直径は $a+b$なので、半径はその半分、つまり$a\,,b$の相加平均になりますね。図から（相加平均）≧（相乗平均）が言えますし、等号成立は$a=b$のときであることもわかります。

コンバージョンキックをする選手はこんなイメージを持っていれば、見込む角を最大にするポジションがわかるわけです。ってそんなことする選手なんかいませんよね。

## 【オマケのオマケ】

最後の最後に、紙面が少し余っているので、ちょっとマニアックな最小値の決定問題について取り上げてみたいと思います。

$f(x)=x+\dfrac{2}{x-3}$ $(x>3)$の最小値を求めよ

これは一般的には数Ⅲの微積分の問題ですね。でも相加相乗平均の不等式を用いると

$$f(x)=x-3+\frac{2}{x-3}+3\geqq 2\sqrt{2}+3$$

ここから最小値を決定することができます。

ではこれはどうでしょう。

$f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　$(x>0)$

これは次のように考えることができます。

$$f(x)=x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqq 3\sqrt[3]{x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=3\times 2^{-\frac{2}{3}}$$

等号成立は$x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ すなわち$x=2^{-\frac{2}{3}}$のとき

2022 年 10 月 24 日

しもまっちハイスクール　下町壽男