55　たかが８桁電卓されど８桁電卓

単元等　授業論・指導技術（電卓の利用）

◆Contents

- ・電卓の利用①（除算の恒等式）
- ・電卓の利用②（桁の問題）
- ・電卓の利用③（数列の極限）
- ・電卓の利用④（eの値と桁落ち）
- ・電卓の利用⑤（eの値と誤差評価）

1　授業の内容

(1)　確率の基本概念の説明

(2)　余事象の確率

(3)　クラスに誕生日が一致する人が少なくとも一組いる確率を求める

2　授業を見ての所感

先日はお忙しい中，個別訪問で授業を見せていただきありがとうございます．

確率の基本概念を復習した後，**「37 人のクラスで同じ誕生日の人がいる確率を求めよう」**というテーマを掲げ，全員がそのゴールに向かっていく素晴らしい授業でした．

授業を見て感心した部分を３つあげます．

①　本時の学習に入る前に，きちんと既習事項を確認し，スムーズに展開できるような導入を行っていた．

②　次年度の「課題学習」を視野に入れ，日常的な話題を題材に生徒のモチベーションを高めていく工夫があった．工業高校ならではの電卓の利用も効果的だった．

③　板書計画がきちんとなされていて，生徒が今何を学んでいるかよく理解されていた．

先生は，説明が簡潔かつ丁寧で，板書もわかりやすく，若いのに授業技術が非常に高いレベルにあると感じました．また，生徒の反応も良く，普段から生徒と良好な関係を築いていることがわかりました．

${}_{365}P_{37} \div 365^{37}$という計算を行う場面が一つの山場ですが，関数電卓を巧みに使いながらすらすらと解決していく生徒を見て，工業高校ならではの展開であるなあと感心しました．次年度の「課題学習」を意識して，教材と指導案を練ったということですが，工業と数学の融合，日常の問題と数学の融合といった形で，数学が関わる「状況」を生徒に提示し，数学によって，日常の問題が解決できるということを，1 時間の授業の中で非常にわかりやすく示した，ベンチマークされる授業だと思いました．

3　補足すること

私は，個別訪問を実施した先生に対して，教材研究ネタを中心とした情報提供を行っております．

今回は，次年度の課題学習などを意識して，電卓を数学的活動に用いる授業例について触れてみたいと思います．

電卓を「計算機」として筆算の肩代りさせるだけの利用は，数学的活動としてはあまり感心しません．逆に，電卓の不都合な部分を補うために数学を活用するとか，電卓の出力結果から数学的な考察を行うといった活動を考えたいと思います．そういう意味では，関数電卓より，むしろ普通に 100 均で売っている８桁電卓を利用した方が面白い授業が展開できるのかもしれません．

その①　除算の恒等式

> 8 ケタ電卓で，$\dfrac{1}{23}$を正確に循環小数で表すにはどうすればよいか考えてみよ．

$\dfrac{1}{23}$は循環節が 22 なので，8 桁電卓では表示しきれません．ではどうすればよいか．生徒（グループ）に考えさせてみると面白いと思います．

【指導例】

簡単のために，8 桁ではなく，4 桁で考えたいと思います.

今， 1 ÷23 を計算したところ，0.0434　と表示されたとします．小数第 5 位以下は不明です.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\quad 0.0434 \quad} \\ 23 & \quad 1 \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ \hline & \qquad \blacktriangle \end{array}$$

求めたいのは，図の▲のところの数ですね.

そこで，除算の恒等式

A÷B＝Q　余り R　のとき　A＝BQ＋R

が役立ちます.

1＝23×0.0434＋▲　なので,

▲＝ 1 －23×0.0434＝0.0018

つまり，18÷23 を実行すれば，小数第 5 位以下がわかるわけです.

以下のようにすれば 4 桁ずつ確保していくことができます.

① 1÷23＝$0.\boxed{0434}782$

0.0434×23－1＝-0.0018　より 18 が次の数

② 18÷23＝$0.\boxed{7826}086$

0.7826×23－18＝-0.0002　より 2 が次の数

③ 2÷23＝$0.\boxed{0869}565$

0.0869×23－2＝－0.0013　より 13 が次の数

④ 13÷23＝$0.\boxed{5652}173$

0.5652×23－13＝－0.0004　より 4 が次の数

⑤ 4÷23＝$0.\boxed{1739}130$

0.1739×23－4＝－0.0003　より 3 が次の数

⑥ 3÷23＝$0.\boxed{13}04347$　で循環した.

$$\frac{1}{23}=0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$$

数学が役に立っていることが実感できます.

その② 桁の問題

> 電卓の計算は 2 進数が基本になっている.8 桁電卓では，２の何乗までの数が表示できるか.（このことによって 8 桁電卓上での計算は何ビットで行われているかがわかる）
> まず，電卓をたたく前に「数学を用いて」予測せよ．その後電卓をたたいて確かめよ.

【指導例】

8桁電卓で表示される数は10^8 より小さいので

$2^n < 10^8$　とすると,

$n\log_{10}2 < 8$

$n < \dfrac{8}{\log_{10}2} = 26.578\cdots$

よって，$n=26$ のとき最大となる.

このとき

$2^{26}=10^m$ とすると

$m=26\log_{10}2=7.826$

$\log_{10}6=0.7781$ ，$\log_{10}7=0.8451$

から

$7.7781<7.826<7.8451$　と評価して

$10^7\cdot10^{0.7781}<10^{7.826}<10^7\cdot10^{0.8451}$

$\therefore\ \ 6\times10^7<2^{26}<7\times10^7$

つまり最高位の数は 6 となる.

この後，実際に電卓をたたきます.

（1 × 2 ＝＝＝＝＝・・・・・）と，確かに 26 回目に 67108864 となりこれが最大です．27 回目にはエラーとなります.

同様に 0 に近い方を調べ， 1 ÷ 2 ＝＝＝＝・・・とすると，24 回で 0 になるので，小数は 24 ビットで計算されていることがわかります．つまり，8 桁電卓は， $2^{27}=\infty$， $2^{-24}=0$　という特殊な閉じた数体系で定義された世界なので，出力した数値を過信してはいけないことが理解できます.

この課題は，思考と作業を循環的に行うことができるので，単にログの計算をするより，意味が理解できると思います．また，数学の力で算出した結果が実際の場面と照合することができるので，数学の良さを実感できるとも思われます.

■ **その③　数列の極限**

(1)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ を考える

①　任意の正の数を置く　（例えば３）
②　ルートキーをひたすらたたく
　　何が言えそうか

(2)　(1)の操作の間に「＋１」を入れる
①　任意の正の数を置く　（例えば３）
②　「＋１＝√」を１セットにして，
　　この操作をひたすら繰り返す
③　値が安定する
　　安定した値はどんな数か．また，
　　なぜそのようになるか．

【指導例】

(1)　どんな数からスタートしても 30 回以内で１になります．このことから　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ が実感できると思います．

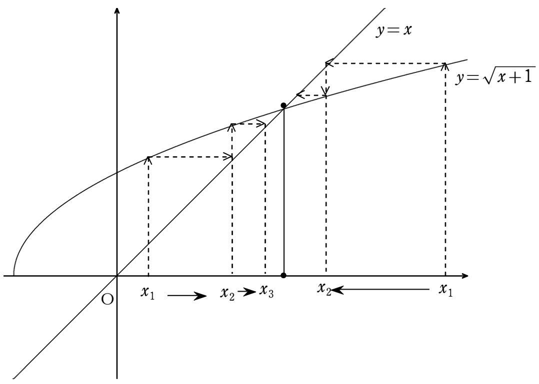
(2)　例えば，「a＋１＝√＋１＝√＋１＝√・・・・」とすれば，a の値に関わらず，値が安定し，その値は，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339$　という黄金比になります．つまり黄金比は「＋１＝√」に関して不変な値ということです．

この結果から，以下のように，数Ⅲの数列の極限の話にもっていきます．

$x^2-x-1=0$　（$x>0$）を考える
$x=\sqrt{1+x}$　とおける．

この方程式の解は　$y=x$ と $y=\sqrt{x+1}$ の交点の x 座標を考えればよい．これは，

$x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}$　（$x_1=a$）という漸化式の特性方程式から極限値を求めることと同じです．



$y=\sqrt{x+1}$ が単調増加であることがポイントです．初項が黄金比より小さければ，単調に増加して極限値である交点に限りなく近づいていくこと，初項が黄金比より大きい時は，単調に減少して極限値に向かうことがグラフからイメージできます．たかが電卓ですが，「単調有界数列は収束する」という実数論まで広げることもできる話題になるかと思います．

(3)　**２の 12 乗根を求める**
平均率の音階にはなくてはならないこの値を，8 ケタ電卓で計算するにはどうすればよいか考えてみよう．

これも，(2)と同様に数列の極限の手法で求めることができます．まず，3 乗根を求め，ルートキーを 2 回押せば 12 乗根が得られます．

そこで、方程式　$x^3=2$ を考えます．
両辺に x をかけて，　$x^4=2x$

ここで，ルートを 2 回とって，　$x=\sqrt{\sqrt{2x}}$

$y=\sqrt{\sqrt{2x}}$ のグラフは単調なので，漸化式

$x_{n+1}=\sqrt{\sqrt{2x_n}}$　（初項は正であれば何でもよい）

の極限値を求めればよいことになります．

電卓の操作は，任意の初項を置いて，「×２＝√√」を嫌になるくらい繰り返せば，一定の値に収束していきます．これが 3 乗根の値です．

その④　e の値と桁落ち

次の計算を行え

$\left(\frac{3}{2}\right)^2$　（３÷２×＝）

$\left(\frac{5}{4}\right)^4$　（５÷４×＝×＝）

$\left(\frac{9}{8}\right)^8$　（９÷８×＝×＝×＝）

$\left(\frac{17}{16}\right)^{16}$, $\left(\frac{33}{32}\right)^{32}$, $\left(\frac{65}{64}\right)^{64}$, $\left(\frac{129}{128}\right)^{128}$, $\left(\frac{257}{256}\right)^{256}$

※　ここまで計算してみて，このまま $\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$ を計算していくとどのようになるか考えてみよ．

【指導例】

$\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$ において，n を大きくしていくことは，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$ という極限を考えていることなので，自然対数の底 e に収束してくことが予想されます．

実際に計算してみると，順に

2.25→2.4414062→2.5657843→2.6379272→2.6769858→2.6973375→2.7077238→2.7129225

e ＝2.718281828459045・・・・

なので，単調に増加しながら極限値に近づいていくことがわかります．

さて，ここで，更に続きを計算します．

$\left(\frac{513}{512}\right)^{512}$　$\left(\frac{1025}{1024}\right)^{1024}$　$\left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}$　$\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096}$

この計算結果からどんなことがわかったかを考えさせます．

計算結果は，順に

2.7155295

2.7166763

2.7169548・・・※１

2.7169548・・・※２

何と，※１と※２が同じ結果になりました．

なぜでしょう．

※１は　$\left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}=\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)^{2^{11}}$

ところが，※２は

$$\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096}=\left(1+\frac{1}{2^{12}}\right)^{2^{12}}=\left\{\left(1+\frac{1}{2^{12}}\right)^2\right\}^{2^{11}}$$

$$=\left(1+2\times\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{24}}\right)^{2^{11}}\quad ▲$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)^{2^{11}}$$

▲がポイント．**その②**で述べたように，８桁電卓上では，$2^{-24}=0$ なので，桁落ちが生じてしまい，ちょうど，※１＝※２となるのです．

よって，これ以降，n を大きくしていっても，どんどん不正確な値になっていくことがわかります．この話題は，数Ⅲの内容だけでなく，２進数や，コンピュータにおける値の評価や信頼性などの実用的な問題を含んでいると思います．

その⑤　e の値と誤差評価

次の計算をせよ．

１[M+]　÷1=[M+]　÷2=[M+]　÷3=[M+]　÷4=[M+]　÷5=[M+]　・・・・・÷10=[M+]

最後に[MR]

※どのような数が得られたか．この数の精度を考えてみよ．

これは，

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}$$

という式の計算です．８桁電卓の値は 2.7182814

となります．これはかなりいい近似で，小数点以下第６位まであっています．

なぜこのように下６桁保証されるか考えてみます．

【指導例】

$f(x)=e^x$ のテーラー展開から

$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$　と表されますが，

この式を利用するとかなり精度のよい値が得られます．

$n=10$ のとき，小数点以下何桁まで保証されるか考えてみましょう．

$$\frac{1}{10!}=\frac{1}{3628800}=0.000000275\cdots<3\times10^{-7}$$

より

$$\frac{1}{11!}<\frac{3}{11}\times10^{-7}<3\times10^{-8}$$

$$\frac{1}{12!}<\frac{3}{12}\times10^{-8}<3\times10^{-9}$$

…………

このことから

$$\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}+\cdots\cdots$$
$$<0.0000000333333\cdots\cdots$$

つまり，$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}$

は小数点以下７桁まで保証されることがわかります．

（ただし，8桁電卓では，最後の桁に誤差が含まれているので6桁までの精度になる）

最後の話題は少し高校の範囲を逸脱するので授業での扱いは無理かもしれませんが，生徒の個人研究など，発展的な学習に用いることができるのではないかと思います．

100 円電卓でも，意外に深い学びができる可能性があります．特に次年度，数学Ａの単元に整数が入り，ユークリッドの互除法や，２進数が登場するので，電卓をうまく使った数学的な活動の展開も考えてみたいところです．