31　「畳８枚」5 点定理の秘密

単元等　数学Ⅱ　微分法（関数の値の変化）

◆Contents

・2 次関数のグラフの軸対称性

・3 次関数のグラフの点対称性

・3 次関数のグラフの等間隔性

1　授業の内容

(1) 3 次関数の極大・極小

(2) 3 次関数のグラフを描く

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問での授業ありがとうございます．先生の一生懸命さがとてもよく伝わる授業でした．

上位クラスということでしたが，生徒は案外基本的な概念や原理を理解せず，単に問題を解くために公式などを適合させる技術に長けているにすぎないことが多いものです．そこで，授業の中で，生徒のモチベーションや興味関心を喚起し，引き出しつつ，わかってできる生徒を作り出していくのが我々教師の腕の見せ所であります．

先生の持つ爽やかさ，大きくて聞き取り易い声，生徒と近い言葉で対話できること，などは大きな武器であると思います．この持ち味を活かしながら，更なる向上心をもって，授業力向上に励まれますことを期待しております．

私は，自分が授業を行う上で，頭に置いている言葉があります．それは，将棋のプロ棋士で，第 18 世名人位でもある森内俊之九段の言葉です．彼は，NHK のある番組の中で，「プロフェッショナルとは何か」という問いに次のように答えています．

「高い専門的技術があることはもちろんですが，それと同時に，今の自分に満足しないで，新しいことに挑戦していくこと，自分を高め続けていくこと．それがプロフェッショナルである」

彼のこの言葉は，「授業のプロ」である私たちも，肝に銘じたいところかと思います．

3　補足すること

私は，授業者の先生に対し，「所感」という名目で，教材研究ネタを作成し配信しておりました．今回は，研究会でも話題になった，３次関数のグラフの特徴について触れてみたいと思います．

２次関数のグラフの軸対称性

３次関数の話の前に，まず 2 次関数のグラフの特徴について調べてみましょう，

2 次関数　$y=ax^2+bx+c\cdots$（※）

で表されるグラフを x 軸方向に $\dfrac{b}{2a}$ だけ平行移動してみます．

$$y=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(x-\frac{b}{2a}\right)+c$$

$$=ax^2-bx+\frac{b^2}{4a}+bx-\frac{b^2}{2a}+c$$

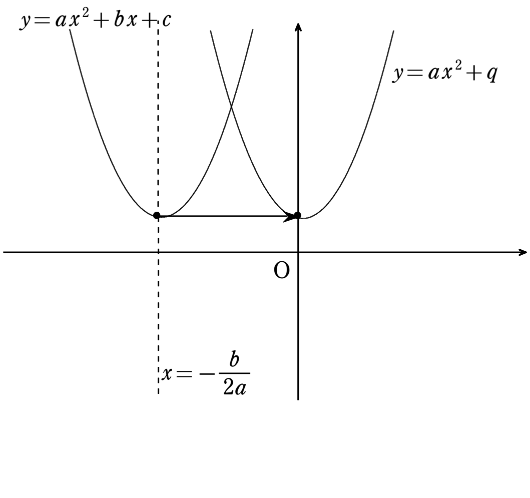
$$=ax^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

1 次の項が消え，2 次の項と定数項（偶数次の項）だけ残り，$y=ax^2+q$ 型の式になりました．

このような式で表される関数を偶関数といいます．

このグラフは y 軸に関して対称になります．

ということは，（※）は，直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ に関して対称なグラフであることがわかります．このことから，2 次関数は，y 軸と平行な直線を軸に持つ，軸対称なグラフであることがわかります．



３次関数のグラフの点対称性

では，３次関数のグラフはどのような特徴があるか考えてみましょう．

$y=ax^3+bx^2+cx+d\cdots$（※）

（※）で表されるグラフを，x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$ だけ平行移動してみましょう．

$$\begin{aligned} y&=a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(x-\frac{b}{3a}\right)+d \\ &=a\left(x^3\underline{-3x^2\cdot\frac{b}{3a}}+3x\cdot\frac{b^2}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}\right) \\ &\quad\underline{+b}\left(x^2-\frac{2b}{3a}x+\frac{b^2}{9a^2}\right)+cx-\frac{bc}{3a}+d \end{aligned}$$

少し計算が大変ですが，上の式の点線部分がうまいこと消えてくれて，結果として，（※）を x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$ だけ平行移動したグラフの方程式は，

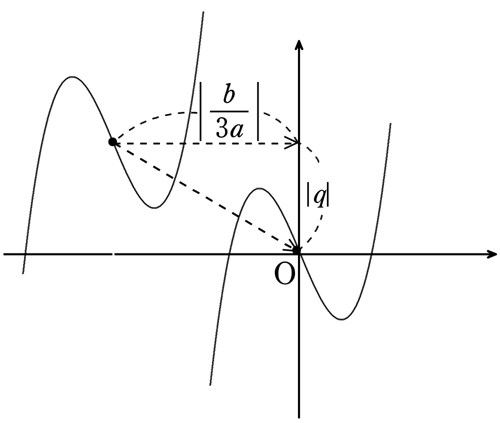
$y=ax^3+px+q$　と，２次の項が消えることがわかります．

更にこれを y 軸方向に $-q$ だけ平行移動すると，

$y=ax^3+px$　という奇数次だけ残る式になります．これは奇関数で，グラフは原点に関して対称になります．

ということは，もとのグラフ（※）は，点対称のグラフであることがわかりました．

２次関数は「軸対称」，３次関数は「点対称」と意識しておきたいと思います．



ところで，$y=ax^3+bx^2+cx+d$ において，

$y'=3ax^2+2bx+c$　なので，$y'=0$ とすると，

$3ax^2+2bx+c=0$　※※

これが，異なる２つの実数解を持つとき，つまり，※※において $D>0$ のとき，（※）は極値を持つということになります．

今，$D>0$ として，※※の異なる２つの解を α，β とすると，解と係数の関係から，

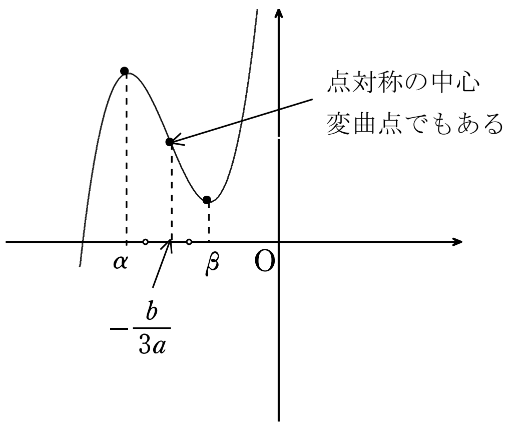
$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}$$

つまり，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{b}{3a}$　となります．

ということは，x 座標で考えた場合，極値を持つ２つの点の中点に対称点があるということがわかります．

ついでに言うと，$y''=6ax+2b$ なので，

$x=-\dfrac{b}{3a}$ は，$y''=0$ となる点（変曲点）でもあります．



ここまでの話は，授業で詳しく説明するということではないと思いますが，３次関数のグラフを描くときの留意事項として点対称性には触れておきたいところです．

「詳しい証明はあとで行うけれど，３次関数は極大と極小の点の中点に点対称の中心があるということを意識してグラフを描こう」という程度でもよいのではないかと思います．

３次関数のグラフの等間隔性

３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の極小となる点が原点にくるように平行移動してみます.

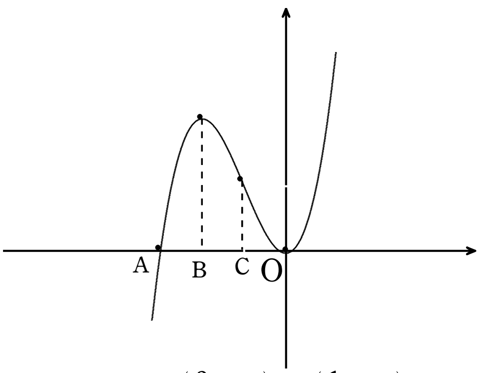
すると，原点で接しているので，グラフの方程式は $y=ax^2(x-\alpha)$ となります.

ここで，極値を求めてみましょう.

$$y'=3ax^2-2a\alpha x$$

$y'=0$ として解くと，$x=0,\dfrac{2}{3}\alpha$

グラフは次のようになります.



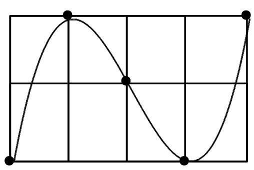
$$A(\alpha\,,0)\,,\,B\left(\frac{2}{3}\alpha\,,0\right),\,C\left(\frac{1}{3}\alpha\,,0\right)$$

このことから，AB : BO＝１ : ２

がわかります. また，BO の中点が C だったので，

結局　AB : BC : CO＝１ : １ : １

つまり A,B,C,O は等間隔に並んでいることがわかります. これが３次関数の等間隔性です.



すべての（極値を持つ）３次関数は，図のように，

- 極小値と同じ高さになる点
- 極大となる点
- 点対称の中心
- 極小となる点
- 極大値と同じ高さになる点

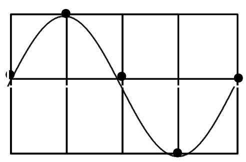
の５つの点の x 座標は等間隔に並ぶという，とても美しい性質が導かれました.

３次関数のグラフは，このことに留意すると上手に描画できるのではないかと思います. 今述べたように，証明はそれほど難しくないと思いますが，とりあえず，証明抜きに数学的事実として示しておいてもよいのではないでしょうか.

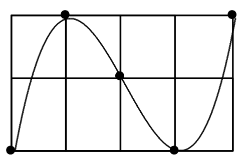
後で，定区間での最大最小問題や，接線がらみの問題，極大値と極小値の和を求める問題などを考えるとき，この性質を理解していれば，見通しがすっきりするのではないかと思います.

オマケとして，サインカーブと比較してみても面白いかもしれませんね.

$y=\sin x$



$y=ax^3+bx^2+cx+d$



COFFEE　BREAK 17

偏差値の話

ある先生から次のような質問がありました．進研模試に関する資料の中に，次回の模試の目標偏差値に達するにはあと何点アップすればよいかという目安を示すものとして，

｛目標偏差値－今回の全国偏差値｝×標準偏差÷10＝アップ目標点

という式が紹介されていました．なぜこのような式が出てきたのでしょうかというのが質問です．

偏差値は次のような式で表されます

$$偏差値=\frac{得点-平均}{標準偏差}\times 10+50$$

偏差値を Z，得点を X，平均を $\overline{X}$，標準偏差を h とおくと上の式は

$Z=\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10+50$　となります．

ではこの式を細かく見てみましょう。

$X-\overline{X}$ ……これは得点から平均点を引いたもの．
平均点と同じ得点の人は０点になります．
つまりこの式は「平均点を０点にする平行移動」という意味を持ちます．

$\dfrac{X-\overline{X}}{h}$ ……$X\to X-\overline{X}$ としても全体の分布の散らばり具合，つまり標準偏差は変わりません．
ですから，$X-\overline{X}$ を h で割った値にすることで，全体の標準偏差が１になります．
つまりこの式は，
全体の標準偏差を１に拡大縮小する式です．

$\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10$……$\dfrac{X-\overline{X}}{h}$ とした瞬間、全体の標準偏差は１になっているので、それを10倍すれば、標準偏差が10になります．つまりこの式は，全体の分布の幅を10倍に拡大する式です．
標準偏差が10になったわけです．

$\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10+50$ ……　$\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10$ としても全体の得点の平均は０のままです．これに50を足すことで，平均点を50まで引き上げます．
つまりこの式は，平均を０から50に平行移動する式です．

つまり，偏差値　$Z=\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10+50$ は，
その集団の平均が50，標準偏差が10となるように，個々の得点を平行移動，拡大縮小したものに他なりません．

では，冒頭の式
｛目標偏差値－今回の全国偏差値｝×標準偏差÷10＝アップ目標点　について見てみましょう．
今回の全国偏差値＝Z，標準偏差＝h，今回の全国平均＝$\overline{X}$，本人の得点 X とすると，

$Z=\dfrac{X-\overline{X}}{h}\times 10+50$　……①　ですね．

次に，目標とする全国偏差値＝Z'，そのために取らなければならない得点＝X' とすると

$Z'=\dfrac{X'-\overline{X}}{h}\times 10+50$　……②

ここで，②－①とすると　$Z'-Z=\dfrac{10}{h}(X'-X)$

この式から　$X'-X=(Z'-Z)\times h\div 10$ ……③
$X'-X$ はアップ目標点なので，上の③式はまさに冒頭で登場した式になりますね。