

28 指数関数の授業の工夫一考

単元等 数学Ⅱ 指数関数

◆Contents

- ・ 2^{-1} をどう教えるか
- ・ 音楽と指数関数

1 授業の内容

- (1) 指数法則の復習
- (2) 指数の拡張とその計算

2 授業を見ての所感

先日は個別訪問で、授業を見せていただきありがとうございます。3年の人文自然系列といっても、進学志望者と就職志望者、進路決定者と未決定者が混在していて、指導が難しいのではと思われましたが、生徒は非常に明るく、よく先生の発問に反応し授業に参加していたことに感心しました。

先生は、椅子を机にきちんと入れさせてから礼をさせるなど、授業規律の面で妥協せず厳しく指導されているのですが、一方で、敢えて、生徒にスキ（ぼける、わざとまちがう）を見せたり、じゃんけんをうまく活用したりして、生徒の心を掴み、ラポールを取りながら自由な雰囲気発言でできる場を形成していました。

一日一発言を目標にしているということでしたが、そのような参加型、対話型の授業になっていたと思います。

授業冒頭に、まだ教えていない指数の拡張（ $2^0, 3^{-2}$ など）を白紙の状態から考えさせ、敢えて $2^0 = 0, 3^{-2} = -9$ という誤答を出させながら授業展開していったのは、本時のゴールがより明確になり良かったのではないかと思います。

「この授業が終わった後は、ゼロやマイナスの指数でもできるようになる」ということを生徒に示すことで、生徒のモチベーションが上がったと感じました。

3 補足すること

私は、授業者の先生に教材研究ネタを提供しておりました。今回は指数関数について少し述べようと思います。

■ 2^{-1} をどう教えるか

教科書では、「 $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と決め

る」として、負の指数の値を定義しています。

つまり、既習事項から演繹的に導かれるものではなく、あくまでもそのように「決める」ということです。しかし、だからといって「教科書に書いてある定義だから覚えなさい」というのでは、そのうち、 $2^0 = 0, 2^{-1} = -2$ などという解答が生じてしまうことは容易に想像が付きまします。ですから、いかに生徒に「納得」させるかということがポイントになると思います。

納得のさせ方は2通りあると思います。

<その1>指数法則を保存する

指数を拡張したとき、それまで用いてきた以下の指数法則

- ① $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ② $a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n)$
- ③ $(ab)^m = a^m b^m$
- ④ $(a^m)^n = a^{mn}$

が、使えなくなると非常に不便です。ですから、定義を拡張する場合は、それ以前に用いていた法則を満足するように決めようというのが数学の立場です。

例えば、ルートの計算では $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ が成り立ちます。ところが、数を拡張してルートの中が負の数となる虚数を考えた場合、 $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$ となり、法則が崩れてしまいます。そこで、ルートの中に負の数ある場合は $i^2 = -1$ となるような虚数単位 i を用いることで不具合を解消します。

つまり、 $\sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = \sqrt{6}i^2 = -\sqrt{6}$ となり、それまでの計算規則が保存されるので、安心して、虚数も数の仲間として扱うことができます。

ですから、 $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と定義してお

けば、指数法則はそのまま保存されますし、②については、 $m > n$ にこだわらずに考えることができるので、自由度が大きくなり、より発展的に考えていくことができるわけです。

＜その2＞類推する

「マイナスかけるマイナスはなぜプラスになるか」という疑問の解消するために、次のような式を並べて説明することがよくあります。

$$-2 \times 3 = -6$$

$$-2 \times 2 = -4$$

$$-2 \times 1 = -2$$

$$-2 \times 0 = 0$$

$$-2 \times (-1) = ?$$

かける数を1ずつ少なくしていくと、積は2ずつ増えています。このルールが、最後の式にも適用されるためには、 $-2 \times (-1)$ はその前の答えの0から2増えた2であれば「よく定義された関係」となります。

このようにして、マイナス×マイナスはプラスであることを納得します。

この手法を指数についても行ってみます。

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

$$2^0 =$$

$$2^{-1} =$$

指数を1ずつ少なくしていくと、前の数の半分になっていることがわかります。このルール

で続けていけば、 $2^0 = 1, 2^{-1} = \frac{1}{2}$

とするのが自然であることが納得できます。

教科書によっては、＜その1＞の考えしかない場合がありますので、＜その②＞の方法も併せて指導したいところです。

オマケとして、

$$2^{-1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

なんていうことを、黑板にかくと生徒は喜ぶと思います。

■ 指数関数

指数関数は、自然現象や社会現象によく現れます。その一例として、平均率に潜む指数関数について、一昨年、八戸西高で配布していた数学通信の記事から紹介したいと思います。

音楽と指数関数

数学と音楽といえばこれはもう切っても切れない縁があって、古代から数学者は音楽の研究者でもありました。三平方の定理で有名なピタゴラスは数学的な手法によって「ピタゴラス音階」を作り、これが現在の音階の基礎になっています。また、ケプラーやオイラーなど多くの数学者・物理学者が現在の音階とは異なる音階を作っています。

16世紀フランスの数学者メルセンヌは数学者であるとともに、音楽理論の研究家でした。過去の音楽理論を研究し数学的に理論づけた最初の人ともいわれています。彼は振動する弦が同時に数個の音を発する理由を考えたり、弦の長さや振動数、張力の関係式を求めたりしています。

そもそも、音は空気の振動が鼓膜を刺激することで生じます。そのとき、空気の振動数が大きければ（つまりサインカーブの周期が小さい）高い音に聞こえ、振動数が小さければ低い音に聞こえます。では、私たちが音楽の授業などで扱っている音階（平均律といわれる）はどのような振動数の構造になっているのでしょうか。

何と、そこには指数関数が隠されているのです。

ド→ド#→レ→レ#→ミ→ファ→...

と半音ずつ上がっていく時、振動数は1.06倍（こ

れは2の12乗根($2^{\frac{1}{12}}$)されていきます。つまり、

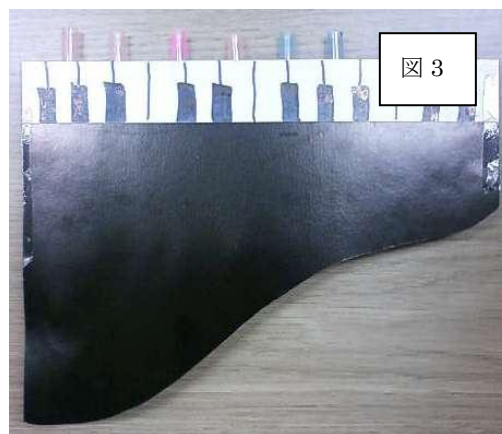
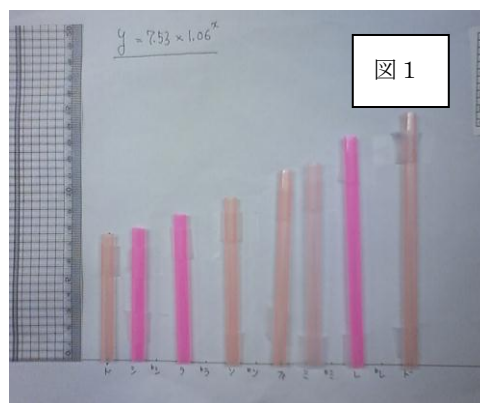
平均律の音階は、指数関数 $y = a \times 1.06^x$ によって表すことができるのです。

100均で少し太いストローを買ってきます。

7.5cmの長さに切って、ストローの口に横から息を吹き込むとドの音になりました（ストローの下の方は指で押さえる）。それに1.06をどんどんかけて、ドシラソファミレドの音になる8本のストローを作りました（右図1）。並べると指数関数の右上がりのグラフになっていますね。

せっかくだから、楽器にしましょう。8本のストローを図2のようにテープで止めます。下の口を塞ぐために紙粘土（軽いタイプではダメ）で固定します。表がピアノに見えるようにするとなかなか味がありますね（図3）。吹いてみると結構ちゃんと楽器になっています！

皆さんも試してみてくださいは？



COFFEE BREAK 14



楽しい授業と 進学指導② すうがく通信 10号より

格段の東大合格実績を誇る SEG（代表古川昭夫氏）というハイレベル塾をご存知でしょうか。この塾の教育理念として次のような文が掲げられています。

私たちが目指すことは、すでに皆さんの心の中にある「**数学を好きになる心**」を育てることです。そして、それこそが数学を得意になる唯一の「王道」だと信じています。それでは、どうすれば「**数学を好きになる心**」を育てることができるでしょうか？ それには、**数学が楽しいと思っている教師に習うこと**がまず必要です。数学が楽しいと自らが信じていて、自らも楽しみ、その楽しみを他の人と分かち合いたいと思っていて、しかも、生徒がどんなところで間違えやすいかをわかっている、注意深く教えてくれる教師に出会えば、自然に誰だって**数学に興味**がわいてくるものです。その上で、**数学の美しさ・考えることの楽しさ**を自分自身で体験することが欠かせません。いくら感動的な絵を見ても、自分で絵を描かない限り、絵を描く技術は上達しません。数学の技術も、自分自身で手と頭を動かさない限り伸ばすことはできません。でも、好きなことなら、そのために努力することは苦痛ではないはずです。（以下略）

國學院大學教授の里見実氏は、対話による授業の推進を唱え、現在学校現場で行われている授業に対して、辛辣な意見を述べています。

「死んだ知識の注入は、感覚や思考力を麻痺させる」

<前略>こうした主張に対しては、いつも、同じ反論が蒸し返される。「大変結構な理想論ではあるけれども、いかんせん“時間が無い”という反論である。「講義式の授業ですら、教科書の内容をすべて教え切ることには困難

なのに、まして、そのような時間のかかるやり方をしていたのでは、必要な知識を生徒に習得させることはどうして不可能である」という議論である。それは制度の在り方と密着した、その限りで、大変く現実的な>実感でもあるだろう。実際には時間がないわけではない。時間はある。その時間をどう生きるかという**選択の違いがあるにすぎないのである**。むしろ、自分で活かすことのできない時間があまりにも多すぎるから、教科書や指導書の指示にもとづいて、時間を埋めているというのが本当のところではないかと思う。「必要な知識」なるものは、そのための隠れ蓑として使われているに過ぎない。<能率的に>教科書の内容を生徒の頭に移し入れている（つもりでいる）教師たちは、だが、そのことによって、生徒の精神を受動化し、**知識をみずからのものとしてつかみとる力を、彼らから奪い取っているのである**。知ることの楽しさを、つまり物事の中に深く入り込むことの楽しさをしらない生徒達は、当然のことながら、教科書に書かれた知識をも含めたすべての知識に、内発的な関心や興味を失っていくのである。そうした「教育」に時間をかければかけるほど、それは、生徒の感覚や思考力をいっそう麻痺されるものとなるものとなるだろう。（中略）対話にもとづく知の探究を「時間の浪費」と考える教師たちは、学習者を人間的主体性を欠いた物と化すことによって、知識そのものを死物と化しているのである。どんなにすぐれた知識でも、人間が人間であることをやめるような仕方ですれが習得されているかぎり、それは精神をいっそう無力化する重圧となることはあっても、たえず物事に問いかける活発な精神を育む力とはなり得ないだろう。その意味では、**一見能率的な知識の注入は、かえって時間を無駄に使い捨てているのである**。

僕らが時間を節約し、手際良く、教科書のすべての知識を生徒達に伝達したとしよう。生徒達の社会を読む力が、それでいささかなりとも、高められるであろうか。回答は教師自身が、誰よりもよく知っている。いや、それは、教師自身の姿において、すでに示されている。（「学校を非学校化する新しい学びの構図」より）