17　数学基礎のエッセンスは全科目に通じる

単元等　数学基礎「反射と線対称」

◆Contents

・数学基礎について
・鏡と幾何
・2 次曲線と反射
・垂足三角形と反射

1　授業の内容

(1)　線対称の性質を理解する

(2)　線対称性を利用して最短距離を求める

2　授業を見ての所感

先日は，個別訪問で授業を行っていただきありがとうございます．先生は赴任早々，生徒の学力実態を鑑みて，少人数制を提案し実施するなど，リーダーシップを発揮し，まさに数学科を牽引し，学力向上に努めておられます．

しかし，その中で，数学基礎の指導には自信がないので授業を見て評価をして欲しいとの要望があり，今回の授業参観となりました．自分の弱点を敢えてさらけ出して評価を求めるということは勇気のある行動で，なかなかできるものではないと感心しました．

数学基礎の授業を成功させるには，教師自身の数学への強い好奇心や深い教材研究が求められることや，1 時間の授業のための準備，T_2との打合せなどをしっかり行わないと生徒を導いていく授業にならないなど，様々な要素があると思います．先生はそのような葛藤と闘いながら精一杯頑張っていることが窺える授業でした．

具体的に良かったと思った点をあげると

◆ダンボール箱等身近な材料を使い教具を作成し，それを利用して説明していた．

◆「最短距離は直線である」というフレーズを何度も発しながら，本時での学習課題の定着の確認を行っていた．

◆生徒への発問を頻繁に行い，授業者の方を向かせる努力をしていた．

などです（ちなみに，5 時間目の授業（数学Ⅰ）は，紙板書などを用い工夫を凝らしながら，ぐんぐん生徒を引っ張っていく，一体感，臨場感のある授業展開で，6 時間目とは別人！のようでした）

研究会でも述べましたが，数学基礎を指導するにあたって，留意する点として，以下のことをあげておきたいと思います．

① 生徒に活動（操作・実験・観察・工作など）させる場面をできるだけ作る．

② 先生が四苦八苦せず楽しく教える．数学基礎は，概念の定着などより，もっと大らかに楽しく取組むことも必要．

② 「数学基礎」だけだと大変なので，数学の「基礎」を指導する場面も作る．

③ T_2と連携を取る．

④ 常に面白い授業をストックするような姿勢を持つ．

数学基礎は，社会生活や身近な自然現象などから数理的な関係を見つけ，それを考察する楽しさを味合わせる教科といえると思います．

そしてそれは，何も数学基礎に限ったことではなくどの科目にも当てはまることだと思います．であるならば，数学教師こそ，日常の中にある数学を見つけること，そして数学の楽しさや，面白さ，美しさなどへの高い「関心・意欲・態度」を持って教材研究し，授業を行うことが求められると思います．

3　補足すること

私は，個別訪問を行ってくださった先生方に，その授業の内容にちなんだ教材研究ネタを提供させていただいております．

今回は，身近なところに見られる対称性についていくつかの話題を紹介したいと思います．

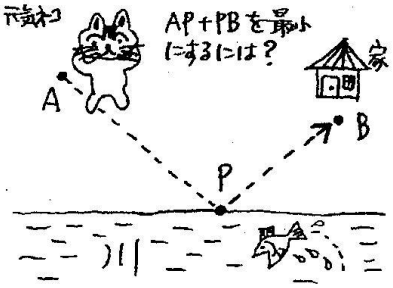
鏡で幾何しよう

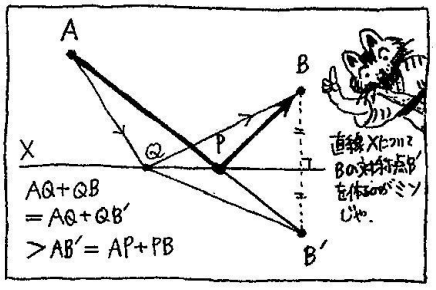
線対称の話題には鏡がかかせないと思います．以下に紹介するのは，伊藤潤一先生（白百合学園）の実践テキストから抜粋したものです．

●ネコでもわかる 2 辺の和

－ネコ君水を飲んで家に帰るの巻－

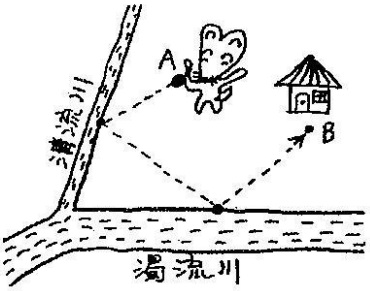
夕暮れになり遊びつかれた“元気ネコ君”は，川で水を飲み，家に帰って寝ようと考えました．すっかり疲れきり，最短で家に帰るにはどうしたらよいか悩んでいます．どうしたらいいでしょうか．

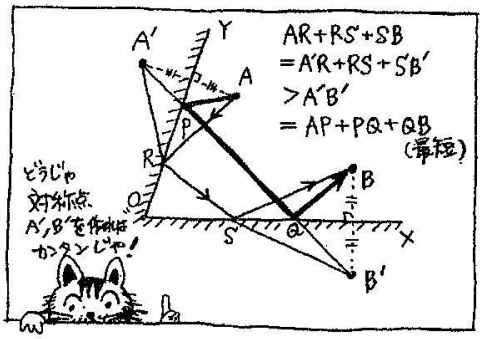




－ネコ君水を飲んで足を洗い家に帰るの巻－

遊びほうけた“うかれぎつね君”は清流川で水を飲み，濁流川で足を洗って家に帰ることにしました．最短で家に帰りたいのですが，怠け者の彼はその方法を考えたくありません．きつね君に教えてあげて下さい．

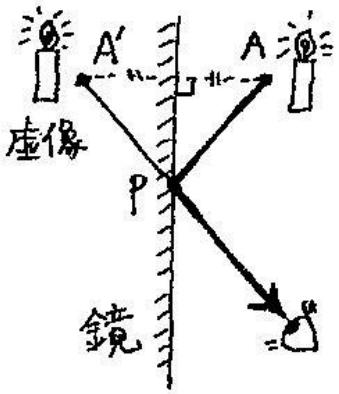


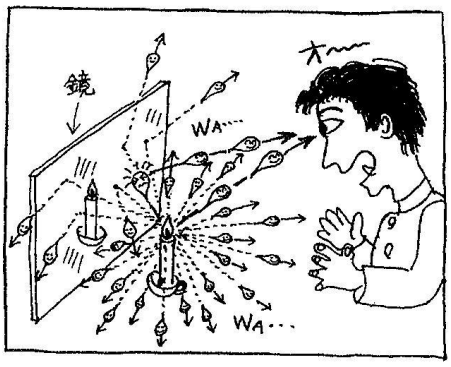


●光学と幾何

－鏡に映ったロウソクの灯－

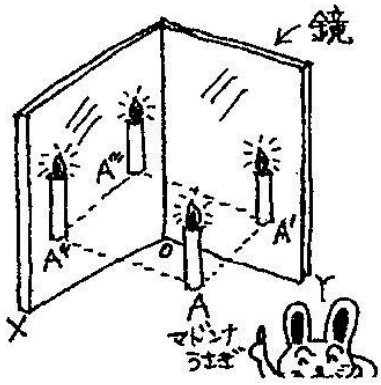
ライト族の光子達は光の化身である．光子達の仕事は，ものの映像を最短距離で観測者に運ぶことである．君が鏡の前に 1 本のロウソクを置いたとする．これに対してライト族は，この映像を直接目に運ぶ．同時に鏡で反射された映像を運ぶ．これが鏡に映ったロウソクの虚像になる．このことから光の入射角と反射角が等しいことが簡単に導かれる．

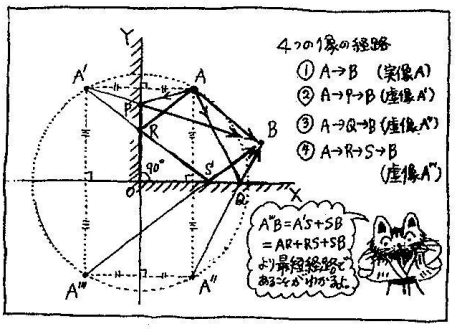




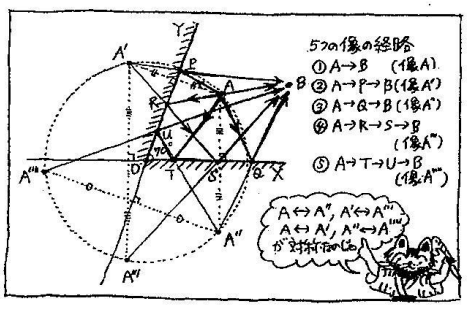
－ショートケーキをデコレーションケーキにする方法－

マドンナうさぎさんは，２つの鏡Ｘ，Ｙを図のように 90°に合わせ，その前に１本のロウソクを置いたら，虚実あわせて４本のロウソクの増が見えました．「あれ？実像はひとつ，鏡Ｘと鏡Ｙに反射された虚像は２つでしょ．もう一つの虚像はどうして見えるのかしら．」

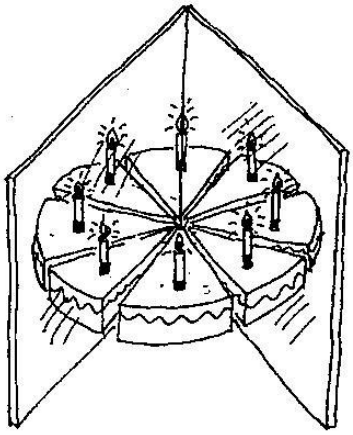




「2 枚の鏡Ｘ，Ｙを図のように 70°に合わせて，1 本のロウソクを置いたら虚実合わせて何個のロウソクが見えるかな？じっくり考えてみるのじゃ」

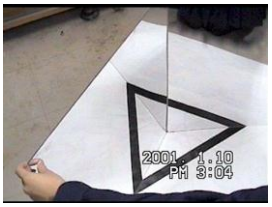


「2 枚の鏡Ｘ，Ｙの前にショートケーキを置き，鏡の角度をこのように小さくすれば，ドンドン増やすことができるのじゃ．ほらデコレーションケーキができた．♪ハッピバースデーツーユー･･･」

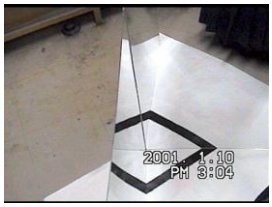


鏡で正多角形の実践より

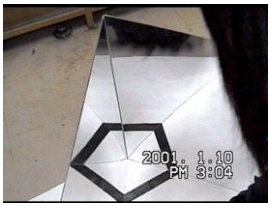
2001 年に私が盛岡三高で行った授業を紹介します．縦１ｍ横 70cm 位の，カーボネイトミラー（1 枚 3000 円）を 2 枚を中央で貼り合わせて見開きになるようにします．角度をいろいろ変えることで，正多角形が生まれていきます．



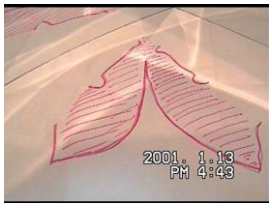
120°（正三角形）



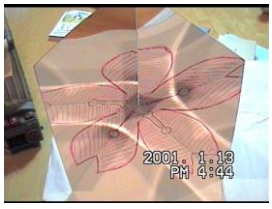
90°（正方形）



72°（正 5 角形）

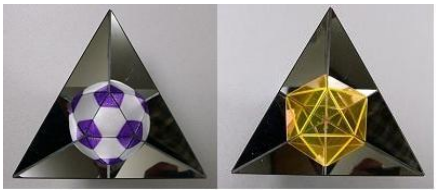


↓

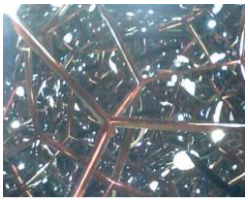


鏡で作る多面体万華鏡

鏡の反射の原理を応用して，美しい立体の像を作り出すことができます．



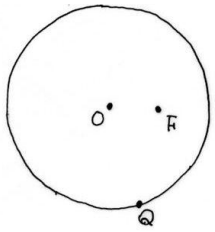
一関工業高校の宮本次郎先生のＨＰには，内部が鏡面の正多面体の内部にカメラを入れたものの写真があります．



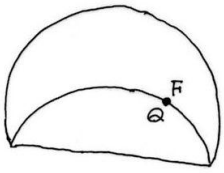
2 次曲線と線対称

－紙を折って楕円を作る－

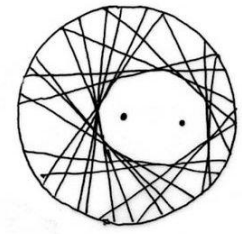
① 円形に切った紙を用意する．円内に中心以外の点Ｆをとる．



② 円周上の任意の点ＱをＦと重なるように折る

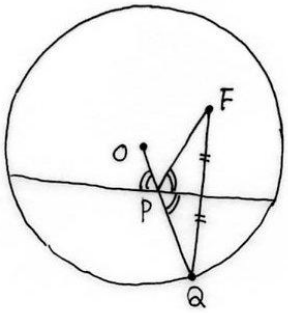


② 円周上のいろいろな場所で②の作業を行う



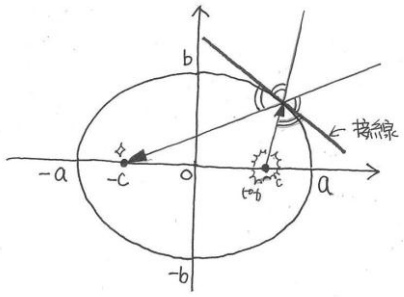
折れ線から楕円が浮かび上がる．

＜原理＞



Ｑは折れ線に対してＦの対称点になっていることから，OP+PF＝OQ＝半径（一定）なので，Ｐは楕円上の点であることがわかる．

また，角度の関係（入射角と反射角が等しい）から，楕円の一方の頂点から発した光は，反射してもう一方の焦点に達することもわかる．

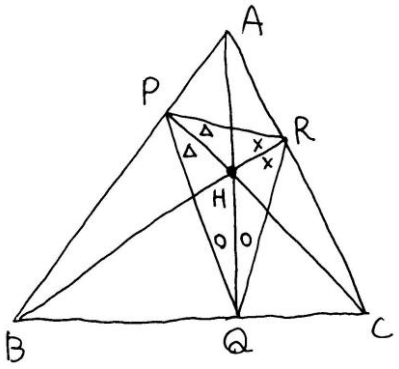


楕円のこの性質を応用したものに「体外衝撃波結石破砕術」（ＥＳＷＬ）と呼ばれる胆石の治療法があります．これは，体外の装置（図）内の楕円の焦点から衝撃波をもう一方の焦点に結石の位置を合わせて集中させることで，結石を砕くという治療法です．数学が役に立っている例として生徒に紹介したい話題です．

（写真は宇治市第二岡本総合病院のホームページ http://www.okamoto-hp.or.jp/oka2/XP/top.htm より）

三角形における反射と対称性

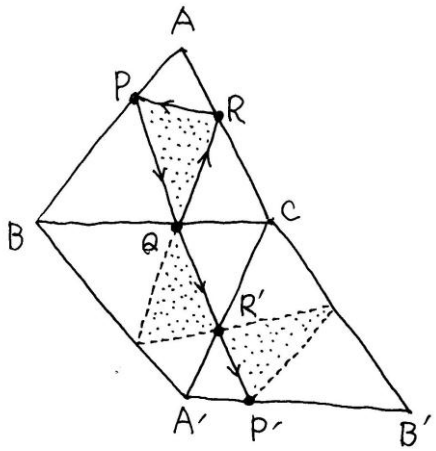
－垂足三角形－



頂点から対辺に垂線を下ろしてできる三角形 PQR を垂足三角形とよびます. 各垂線の交点 H は三角形 ABC の垂心であるとともに，三角形 PQR の内心にもなっています（証明は平易）.

このことから，P 地点から光を Q に当てると，R を経由して P に戻ることになります.

つまり，この三角形を線対称（各辺に鏡を置くイメージ）してみると，図のように，PQ＋QR＋RP=PP’ となり，それらの考えを用いることで，垂足三角形は，３辺上の点を通る最短経路であることがわかります.



COFFEE BREAK 9

楽しい授業と進学指導①
すうがく通信 10 号より

「楽しい授業」「数学の面白さを伝える授業」という話をすると，出会う反応はだいたい次の３つです．

- **先生は暇ですね．私もそういう授業はやりたいけれど，時間がない．まず教科書を終わらせ，テストで点数が取れるようにしなければならないのです．**
- **いまは基礎をやるべきであって，楽しい授業や発展的な内容を今話すと混乱する．今は教科書に書いてあることを徹底して伝えることが大事だ．**
- **数学とはそもそも楽しくないもので，そのつらさを乗り越える訓練をすることに意味がある．だから楽しい授業なんてクソくらえだ．**

では，教科書の問題の解説を淡々と行い，大量のアサインメント（課題やドリル）を与え続けるだけで，センター試験の「パターン処理できない問題が決定的にできない」岩手県の現状や，「授業がわからない」という生徒が再生産されている状況を打破することができるのでしょうか．

「数学の面白さを伝える授業」「楽しい授業」とは，「生徒を笑わせる授業」「課題やドリルがないラクな授業」「モノを持っていって遊ぶ授業」のことではありません．大切なことは，数学に対する興味関心や知的好奇心を高め，**最終的に，自分で課題を見つけ勉強していくような姿勢を持たせる**ことに尽きるのではないかと思います．そのために，時にはモノを使い，時には基礎の先にある面白い世界を予告編として垣間見せるということを行ってみせるということです．

もちろん，講義と演習だけでも，数学の面白さを教えながら，受験に対応する力をつけることもできます．そのような指導をしている先生を紹介したいと思います．

K 氏は，生徒に厳しく妥協せず指導します．しかし，生徒は，先生は自分たちを高めてくれると分かっているので信頼してついていきます．厳しい指導にもかかわらず「授業が楽しい」とこたえる生徒が多いのです．生徒達がどこで躓きやすいかをよく知っているので，課題プリントも，適切な問題をタイミングよく生徒に与えます．決して「ここは出るから覚えておけ」というセリフは使わない先生ですが，生徒を劇的に伸ばします．

I 氏もやはり妥協せず，生徒をひっぱっていく先生で，模試で全国 1 位に導いたという実績を持っています．進度が早く，多くのアサインメントを与えるのですが，先生自身が数学を教えることが本当に楽しそうにしていることや，生徒を絶対に伸ばすという強い熱意が生徒に伝わり，やはり過激に！成績を伸ばす先生です．

さて，2 人の先生の共通する特徴をまとめると，次のようになると思います．

- **先生が，生徒の学力向上に責任を持っている．**
- **目先のテストのためではなく，長期的展望に立ち継続的にぶれない指導をしている．**
- **先生自身が深く数学を理解（愛）していて，現在行っている内容が，他の単元とどう繋がるのか，入試問題にはどのように出題されるかを熟知している．**
- **最終的に，生徒に自分で問題を解くことの楽しさを獲得させている**