

15 順列の授業を作る

単元等 数学A 個数の処理 (順列)

◆Contents

- ・ 順列の導入時に行うあるゲーム

1 授業の内容

(1) 順列のゲーム (班編成による)



- ①写真のような、4色に色が塗り分けられているカードを各班に20種類ずつ配布する。
- ②先生が示した色の順番と同じ並びのものを探して、早く見つけた班が勝ち

③早く発見するために、生徒は辞書式に分類することなどを発見する。

④4種類の色の順列なので実際には24種類なければならない。足りない4種類は何かを発見させる。その理由を説明させる。



(2) 分類と樹形図についてゲームを通して分類することの有用性や、樹形図の良さを説明し、順列への助走とする。



※ 本年7月に、一関工高の宮本教諭が行った授業を参考にして行ったものである。

2 授業を見ての所感

先日は、多忙な中、個別訪問での授業ありがとうございました。

ゲームによって、日常的に備わっている分類の概念を表出させるところから出発し、数学的概念へとつなげる流れはとても素晴らしいと思いました。往々にして、最初から教科書をなぞって ${}_n P_r$ とか ${}_n C_r$ での計算練習をすすめてしまいがちですが、単元の導入時に、分類の概念や有用性についてきちんと説明していくことは、先生と生徒が教材観を共有していく上でとても大事なことであると思います。

授業内容のオリジナルは宮本先生によるものですが、授業を観ていないにもかかわらず、スムーズな授業展開で、生徒も意欲的に生き生きと活動していました。先生の教材の解釈や研究心にとても感心しました。このように、誰かのアイデアによる授業が一つの定番になって共有されていくことは岩手県全体の授業力向上のためにも大切なことだと思います。

そういう意味で先生の志の高さに敬意を表したいと思います。

3 補足すること

私は、授業を行った先生方に、「所感」を配信していますが、その中に授業内容に関わる教材研究ネタを入れることにしています。それは、授業者の先生への話題提供だけではなく、最終的に県内の先生方への教材研究資料を作ることを意図してこのような活動をしております。

そこで、今回は順列の導入で、私が行っているあるゲームを紹介させていただきたいと思います。

■ 順列の導入時に行うあるゲーム

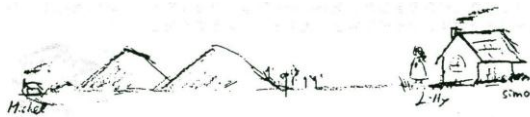
「5人が一列に並ぶ並び方の総数を求める」という部分について、次ページのような「お話し」のプリントを配布し、それを利用して授業を展開する。

連載 The Story Of Eight East

第1話

昔々、Eight East Kingdom という国（国王は Stone bridge 1 世）に、City Village という村がありました。この村にはマイケルという青年が住んでいました。彼は村に教会をつくったり、学校をつくったりして、村の文化や教育の発展に大いに力を尽くしていました。村人からも尊敬されていました。

そんなマイケルには素晴らしい婚約者がいました。その名はリライ。マイケルの住む村の隣にある Down Town に住んでいました。リライはとても優しく気立てのいい娘さんでした。リライの家とマイケルの家は遠く離れていましたが、いつもリライは、多忙で村から出かけることができないマイケルに会うために、Rain drop stone という大きな石のある山を越えて City village まで出かけていきました。



ところがある日、村に突然大雨が襲い、その雨が一ヶ月も降り続けました。この雨によって、City village と Down Town の間にあった、Rain drop stone が崩れ、川が氾濫してしまいました。

その後雨は止んだものの City village と Down Town との間には急流の川ができてしまい、2つの町を行き来することができなくなってしまいました。

来る日もくる日も川を眺めてはため息をついていたリライでしたが、マイケルに会いたいという気持ち日が日につり、なんともしがたくなりました。「ああ、彼に会いたい。でもどうやってこの川を渡ればいいのでしょうか。」リライは近所に住ん

でいて大変物知りで手先も器用なきこりのビリイの家を訪ねることにしました。



平和で安泰な村に突然の大災害！2人はどうなるのだろうか。次号を待て

註：この教材は八戸西高で行ったバージョンなので、The Story Of Eight East としている。また地名などの固有名詞に現れる英語は、すべて八戸西高の先生の名前にちなんでいる。例 City Village = 市村、Down Town = 下町。学校が違う場合はこの部分を変えて行う。

第2話

リライはビリイに何とかして川を渡ることができないかと相談しました。すると、ビリイは川を渡る舟を作ってやろうといいました。しかし、川は大変な急流なので、一人で安全に渡るのとても難しいだろうとのことでした。

リライは何とか一緒に川を渡ってくれないかとビリイに相談しました。

しかし、ビリイは「とても俺にはできない。あそこは、水が怒涛のように流れている。命がいくらあっても足りない」といいました。リライはその言葉を聞いて涙を流しました。その様子を見ていたビリイは、しばらく考えた後、こういいました。「よしわかった。俺は舟は漕げないが、町外れのサイモンならできるはずだ。やつは命知らずの冒険野郎なんだ。彼を紹介してやろう」ビリイは、リライにサイモンを紹介したのでした。



リリイは町はずれ Sun Mountain に住むサイモンのもとに出かけました。サイモンは、「連れて行ってもいいけれど、命がけだぜ、俺だって命は惜しい。タダってわけにはいかないじえ」といいました。リリイはお金ならいくらでも出すといいましたが、サイモンは金はいらないかわりに次のような条件を出しました。

「ようしわかった舟を出そう。ただし条件がある。金はいらねえ。そのかわり、今俺は寂しいんだ。俺と一夜をともにしてくれ。何、煮て食おうってんじゃねえ。一晩だけ俺と一緒にならそれでいいんだ。そのことは誰にもしゃべらねえ。」

リリイは悩みました。悩みに悩んだ末、自分はマイケルに会いたいという気持ちを抑えることができず、サイモンと一夜をともにする決心をしたのでした。

うわあ。サイモンの条件を呑んでしまったリリイ！次号は急展開必至！

第3話

一夜をともにした2人は翌朝川向こうのマイケルのもとに向かいました。川は大変な急流で、サイモンの見事なオールさばきがなければとうてい渡れるものではありませんでした。何度も舟は転覆しそうになりましたが、サイモンは体を張って凌ぎ、ついに川向こうに舟は辿り着いたのでした。



「ほら着いたぜ。ここは Valley Earth Village っつうところだ。ま、ここを道なりにまっすぐに行くと City Village に着くだろう。」

サイモンはリリイに言いました。「ありがとうサイモン。ところであなたはまたこの急流を引き返すの?」「ああ、ここにいてもしょうがねえしな。じ

ゃあ、幸運を祈っているぜ。」

リリイの、少し休んでいけばという忠告を無視し、サイモンは再び川を渡り、Down Town へと引き返しました。リリイはしばらく彼の姿を見ていましたが、はっと我に返りマイケルのもとへと急ぎました。

サイモンは見得を切ってまた川を渡ったのですが、実は疲労はピークにありました。また、リリイには黙っていたのですが、川を渡る際、流れてくる丸太が舟にぶつかるのを防ぐために、足に大きな傷を負っていました。哀れサイモンは力尽き、City Village に引き返すことも、Down Town に戻ることもできず、濁流に飲まれてしまいました。

そのころマイケルは、この大洪水による被害をなんとかしようと、隣国の Marsh tail 3 世を通じて、国王 Stone Bridge 1 世への働きかけを行っていました。早く皆の暮らしが良くなるようマイケルは奮闘していたのです。

リリイはマイケルの家を見つけました。家の前で仕事をしているマイケルを見つけると飛びようにして彼のもとにかけつけました。マイケルはリリイの姿を見ると驚きました。

「リリイ、ど、どうやって君はあの急流を越えて来たんだ」リリイはなんと答えたらしいか悩みました。悩みに悩んだ末、全部正直に彼に話をしようとして決心し、リリイのことやサイモンのことなど一部始終話しました。



せっかく再び巡り会った2人。しかし・・・破局の予感が、次回怒涛の最終回！

第4話（最終回）

リリイの話を聞いていたマイケルは、しだいに握り締めていた拳がわなわなと震え、そうして両手で頭を抱え、何度も何度もかぶりを左右に振りまわりました。マイケルは怒りを抑えることができませんでした。「僕と君は時期がくれば結婚することになっている。なのに一体どうしてこんなこと（つまりサイモンと一夜をともしたことですね）をしなければならぬんだ。僕が、この災害を復旧させるために毎日かけずりまわっていたというのに。第一、こんな無茶なことをして高波にのまれて自分の命を失ったらどうするんだああ。」マイケルは一気に嘔き出しました。そしてもう顔を見せないうでくれ、ともいってしまったのです。

リリイは泣き崩れてマイケルの家を出ました。川を渡り Down Town の自分の家に帰る術もなく、一人村をさまよひあるきました。そのうち、村の東はずれの Waist 海岸にたどり着きました。リリイは寄せては返す波に向かって歩き出しました。波しぶきが自分の体や髪をびしょびしょにしましたが、リリイは半ば気を失いかけて、そのまま押し寄せた波に自分をあずけました。

そこに、Sun Mountainに住んでいる牛飼いのホームズが通りかかりました。ホームズは浜辺に倒れているリリイを見つけました。「だいじょうぶか」気を失っているリリイにホームズは声をかけ、とりあえず彼女をホームズの自宅まで連れて帰りました。

「体が冷えている。そうだ温かいスープを作ってあげよう。」などと、ホームズはリリイの面倒をよく見てくれました。そのかいがあって、リリイは元気を取り戻すことができました。

その後しばらくして2人は結婚しました。ほどなく2人に子供が産まれました。かわいい男の子

だったのでその子供はエイトウエスト坊やと名づけられました。3人は末永く幸せに暮らしたとのこと。どんと晴れ。



The Story Of Eight East（邦題『八西物語』）いかがだったでしょうか。実はこの話は私のオリジナルではありません。十数年前に、私がある人から聞いた話を思い出して、それを膨らませて書きました。知っている人もいるかもしれませんが、この話はある種の心理ゲームになっています。

以前この授業を大野高校で行ったとき、就職した卒業生から、新入社員研修でこの話が出たといわれました。

八西では、この物語を数学通信で4回に分けて連載しました（これを読んでくることが宿題）。それをもとに次のような授業を展開します。

【授業例】

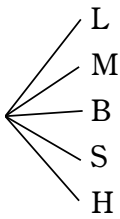
「この物語には5人の登場人物がいました。リリイ、マイケル、サイモン、ビリイ、ホームズです。さて、この物語を読んだ皆さんは、この5人をどう評価しますか。つまり、この5人をあなたの気持ち、考え方や価値観などに照らし合わせて好きな順番に並べてみましょう」

●Step 1 好きな人を1人あげる

「一番好きな人は誰ですか。その理由も言って下さい」（何人かの生徒にあてる。結構盛り上がりませす）「さて、好きな人の選び方は何通りでしょう」

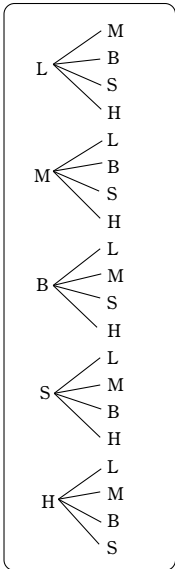
(当然5通りという答えが返る)

「つまり、5通りの性格分類ができるのです」樹形図を描く。それぞれを選んだ人が何人いるか数えてみる。同じ人物を選んだ人は相性がよいなどというホラを吹いたりする。



●Step 2 好きな人を2人並べる

「今度は好きと思う順に2人あげてみよう。何通りの性格判断ができると思う？」生徒に書き上げさせる。組合せの数と樹形図をあわせて示す。



(L,M)(L,B)(L,S)(L,H)
それぞれ2通りだから8通り
(M,B)(M,S)(M,H)
それぞれ2通りだから6通り
(B,S)(B,H)
それぞれ2通りだから4通り
(S,H)
それぞれ2通りだから2通り
以上から
 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ 通り
樹形図で描くと図のようになり、
4つずつ5束あるので

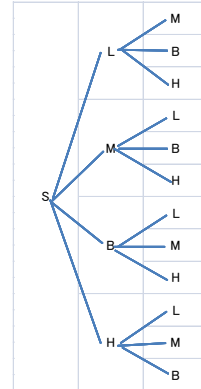
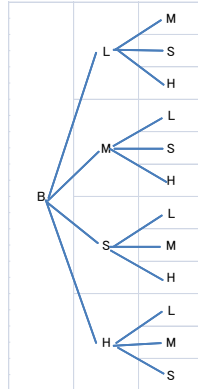
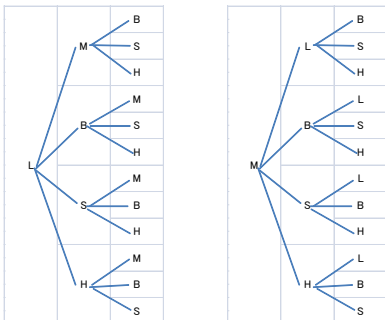
$5 \times 4 = 20$ 通りと掛け算で計算できる。

●Step 3 好きな順に3人並べる

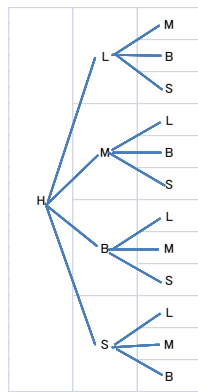
「2人の場合と同じように書き上げよう」
(L, M, B) (L, M, S) (L, M, H) (L, B, S) (L, B, H) (L, S, H)
(M, B, S) (M, B, H) (M, S, H) (B, S, H)

それぞれ6通りだから、 $10 \times 6 = 60$ 通り

樹形図を作ると

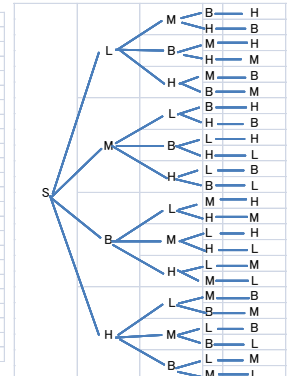
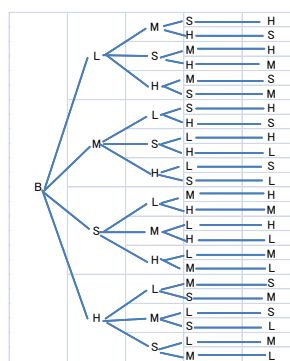
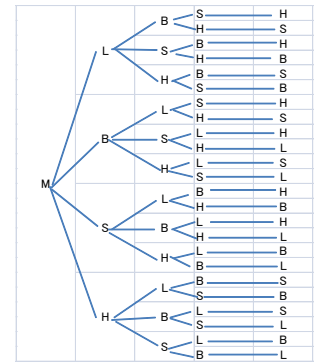
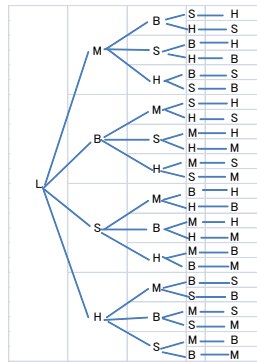


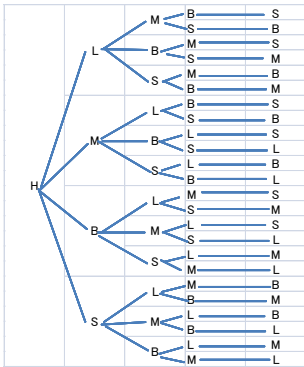
樹形図から、3つずつが4束。それが更に5束なので、 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りとなる。樹形図を描くのは一見大変そうだが、ひと束を作ったものに対して互換を行えばよいことに気づくとスムーズにできる。



●Step 5 好きな順に5人並べる

「頑張って樹形図を作ってみましょう」





樹形図から
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 $= 120$ 通りである
 ことがわかる。
 5つの樹形図から順
 に「M⇔L」「L⇔B」
 「B⇔S」「S⇔H」とし
 ていけばよい。

※ポイントは頑張って全部かくこと！
 (以下、順列と階乗の説明(省略))

●Step6 おまけの話題I

「異なる5人から5人全員選んで一列に並べる並べ方は全部で120通りのパターンがありますね。つまり120パターンの性格分類を行っているのです。タネを明かすと、

リリイ→Lilly →Love→愛

マイケル→Mickel→Moral→道徳

ビリイ→Billy→Business→仕事

サイモン→Simon→Sex→性欲

ホームズ→Homes→Home→家庭 ということです。

例えば、LBMSHと並べた人は、愛を第一に考え、第二に仕事、第三に道徳、第四に性欲、最後に家庭を考えているとなります(これを明かすと騒然となる)

ここで注意が必要なのは、

サイモン→Simon→Sex→性欲の部分。特に女子で、Sを先頭に書いていたりすると、この話をした後、大急ぎで書き直したりする場合がある。そこで、サイモンは性欲ではなく「冒険心」などとして提示した方がよい。

●Step6 おまけの話題II

40人いると、必ず同じ並びの生徒が少なくとも1組はいる。このことについて確率の余事象の場面で触れてみるのも面白い。

昨年は、授業ではなく数学通信で次のような話題を紹介した。

さて、ここで問題。今40人のクラスで、このテストを行った時、性格がぴったり一致している人はいるでしょうか。とりあえず、40人がランダムに5つの文字を並べたとします。このときぴったり同じ並びになっている人が少なくとも1組いる確率を計算してみましょう。

まず、40人が全部異なる並べ方になっている確率を考えます。(余事象といいましたね)

もし、人数がA,B,Cの3人だとすると、BはAの並べ方以外の119通りのどれか、CはA,B以外の118通りのどれかなので、3人とも異なる並び

になる確率は $\frac{119}{120} \times \frac{118}{120}$ となります。

ちなみにこれを計算すると、約0.975なので、少なくとも1組が一致する確率は $1 - 0.975 = 0.025$ ということ、ほぼ2.5%ということになります。

では40人のときはどうなるでしょう。全部異なる

場合の確率は $\frac{119}{120} \times \frac{118}{120} \times \frac{117}{120} \times \dots \times \frac{80}{120}$ とな

りこの値を計算すると約0.00042となります。

ということは、40人の中で少なくとも1組が同じ並びになっている確率は $1 - 0.00042 = 0.99958$

つまり、99.96%の確率で同じ並びの人がいるといえます。ほとんど100%といってもいいですね。

ちなみに、半分の20人の場合でも、84%という高い確率になります。このことを次のような問題に応用することができます。

40人のクラスの中で同じ誕生日の人が少なくとも1組いる確率はどのくらいか。

これを計算すると、

$$1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{325}{365} = 0.903\dots$$

つまり、40人いればほぼ90%の確率で同じ誕生日の人がいるということがいえるのです。

ウソだと思ったら自分のクラスで確かめてみてください。(八西数学通信より)