13　三角形の面積の公式あれこれ

単元等　数学Ⅰ　図形の計量（三角比）

◆Contents

・面積の公式の証明

・面積の公式で遊ぶ

1　授業の内容

(1)　三角形の面積の公式を証明する

(2)　公式を利用して三角形の面積を求める

(3)　面積を利用して線分の長さを求める

2　授業を見ての所感

先日はお忙しい中，個別訪問で授業を見せていただきありがとうございます．導入において，小学校で学習した面積の求め方「底辺かける高さ割る２」を水源地として，本時の学習内容へとつなげたところや，公式の証明を，鋭角，直角，鈍角の場合に分けて行ったところなど，とても丁寧な説明に感心いたしました．また，黒板に，本時の学習すべき公式や考え方を最後まで残し，授業の最後にまとめとして使っていたことなど，板書計画がきちんとなされていたと思いました．

参観者からは「昨年度より良くなっている」「自分だけで進めないで生徒に答えさせている」等の意見があり，授業力が着実に向上していることがわかりました．これからも向上心を持って，頑張ってください．

3　補足すること

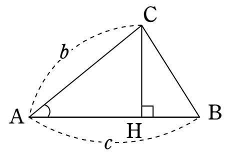
私は，個別訪問を実施した先生に対して，教材研究ネタを中心とした情報提供を行っております．

今回は，三角形の面積の公式にまつわるあれやこれやについて触れたいと思います．何かの参考になれば幸いです．

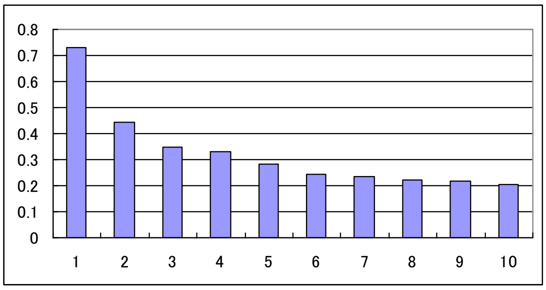
面積の公式の証明

先生もご存知かと思いますが，今年度の基礎力確認調査に次のような問題が出題されました．

次の図の鋭角三角形ABCで，その面積をSとすると，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ が成り立つことを示しなさい。



この問題の正答率は県全体で12%という結果でした．ちなみに，正答率上位10校をあげると，下のグラフのようになっています．



また，無答率は県全体でなんと72%にも及んでいます．1番正答率の高い学校でも，50人もの生徒が無答であることになります．

三角形の面積の公式「底辺かける高さ割る２」を，三角比を用いて表すだけなのになぜこんなにも正答率が低いのでしょう．

原因として次の３つをあげたいと思います

①　証明の仕方がわからない

②　$CH=b\sin\theta$ であることが理解されていない

③　「底辺かける高さ割る２」と連動して面積公式を理解していない

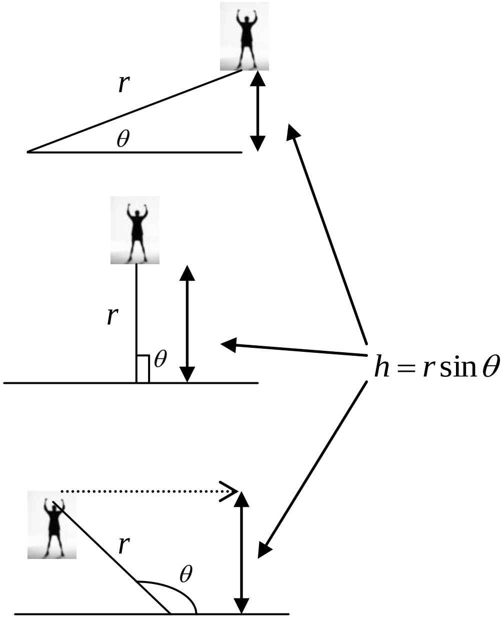
ここでは②について少し補足したいと思います．

拡張した三角比の定義では，単位円上の点Pの y 座標がサインの値です．このことから次のことが導かれます．

傾斜 θ の坂道を r だけ進んだときの地上からの高さがサインである．

これは θ の値によらず（鈍角でも直角でも）成り立つ概念です．三角比は図形の計量と密接な関

係があるわけですから，このことを力説すべきだと思います．



ですから，面積の公式は

$S=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times \sin\theta$　と 3 拍子ではなく，

$S=\dfrac{1}{2}\times c\times (b\sin\theta)$　と底辺×高さを意識するように 2 拍子で覚えさせたいところです．

面積の公式で遊ぶ

では，面積の公式を使って少し遊んでみましょう．

①　外接円の半径と内接円の半径の比

三角形の外接円の半径 R と内接円の半径 r の関係を面積の公式を使って調べてみましょう．

△ABCの面積は

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

正弦定理より　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ だから

$S=\dfrac{abc}{4R}$　よって，$R=\dfrac{abc}{4S}$　※

一方，内接円の半径を用いて面積を表すと

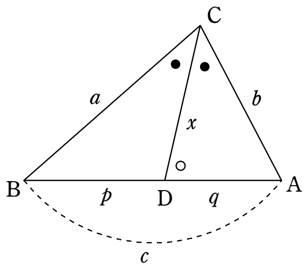
$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$　よって，$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$　※※

※と※※から　$R\times r=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$

なんと，外接円と内接円の半径の積は，3 辺の積を和で割ったものの半分になることがわかりました．結構きれいな式ですね．

②　角の二等分線

図で CD が角 C の二等分線のとき，次のことがわかります．



●＝θ として△BCD の面積 S_1 を求めると

$$S_1=\frac{1}{2}ax\sin\theta$$

△ACD の面積 S_2 を求めると，$S_2=\dfrac{1}{2}bx\sin\theta$

よって，$S_1:S_2=a:b$　※

次に○＝φ として S_1 を求めると

$$S_1=\frac{1}{2}px\sin(180^\circ-\phi)=\frac{1}{2}px\sin\phi$$

同様に S_2 を求めると，$S_2=\dfrac{1}{2}qx\sin\phi$

よって，$S_1:S_2=p:q$　※※

※と※※から，$a:b=p:q$ が得られました．

また，△ABC の面積 S は，θ で表すと

$$S=\frac{1}{2}ab\sin 2\theta=ab\sin\theta\cos\theta$$

ここで，$S=S_1+S_2$ を用いると

$x=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\theta$　と表せます．

調和平均がついた面白い式です．

この式をもう少し変形してみましょう．

技巧的ですが，

$$\cos\theta=\sqrt{\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

として計算してみます．

$$x=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}}$$

$$=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4ab}}$$

$$=\sqrt{ab\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}}$$

$$=\sqrt{ab-\left(\frac{ac}{a+b}\right)\left(\frac{bc}{a+b}\right)}$$

$$=\sqrt{ab-pq}$$ ※

(注　$p=\frac{a}{a+b}\cdot c$ ，$q=\frac{b}{a+b}\cdot c$)

とてもきれいな式が得られました．公式として活用できそうです．

③ヘロンの公式

最後に面積の公式から，ヘロンの公式を導いてみましょう．

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

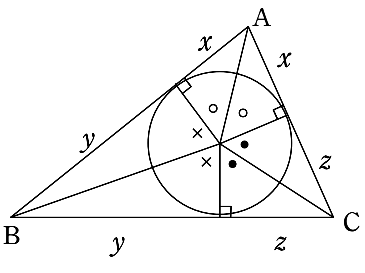
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

$s=\frac{a+b+c}{2}$ とおくと

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ※



ところで，図のように x,y,z と置くと，

$2(x+y+z)=a+b+c$　つまり

$x+y+z=s$　であることがわかります．

ということは

$$x=s-(y+z)=s-a$$
$$y=s-(x+z)=s-b$$
$$z=s-(x+y)=s-c$$

とできるので，ヘロンの公式を x,y,z で表すと，

$S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$　という，これまた３つの線分の長さの和と積の形になりました．

ところで，図において○＝α，●＝β，×＝γ とおくと，$\alpha+\beta+\gamma=180°$　となります．

このとき，次のことが成り立ちます．

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

（1999 年に東北大学に出題されています．タンジェントの加法定理を使えば証明は平易）

この結果より，内接円の半径を r とすると，

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r}=\frac{xyz}{r^3}$$

よって，$r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$

ここで，

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=r(x+y+z)$　なので

$$S=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\times(x+y+z)$$

$$S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

このような手法でもヘロンの公式を導くことができるのですね．

COFFEE BREAK 7

小学校から中学校の接続

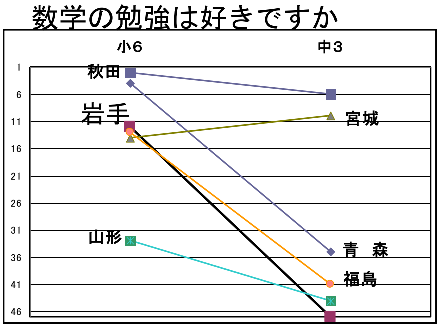
すうがく通信７号より

学力向上を考えるとき，高校での授業や家庭学習だけでなく，学習環境や，中学校との接続の問題にも注目する必要があります．

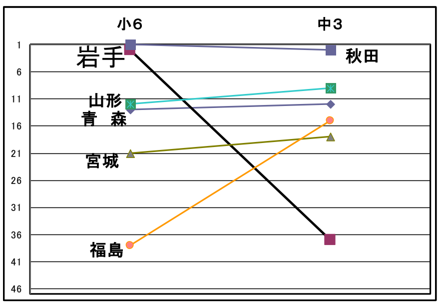
そこで，今回は全国学力調査からの話題を提供したいと思います．全国学力調査とは小学校と中学校の卒業時，つまり小学校６年と中学校３年の段階での学力の定着度を見るテストです．一般の算数・数学のテストの他に，アンケートがあり，学習環境や生活等に関する意識調査も同時に行っています．

では，このアンケートの数学（算数）に関する小中の共通項目のものについて，岩手を含め東北各県の全国順位がどう変化したかを示したいと思います．

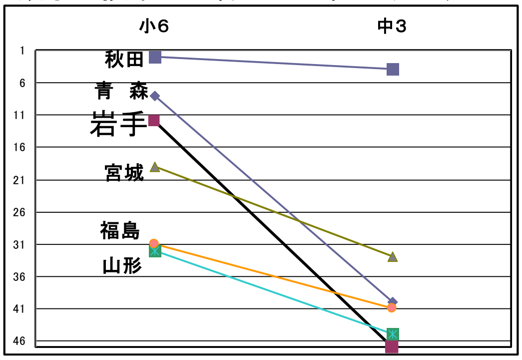
数学の勉強は好きですか



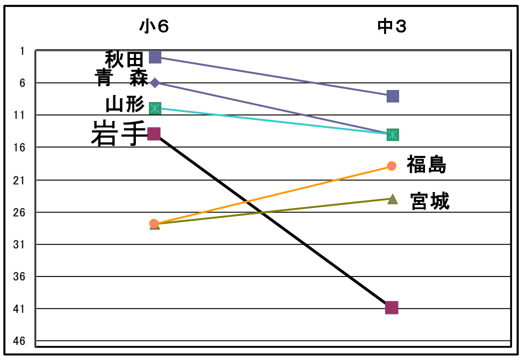
数学の勉強は大切だと思いますか



数学の授業の内容はよくわかりますか



数学ができるようになりたいと思いますか



岩手県は，小学校から中学校に進む中で，数学に対する姿勢が大きく変化していることがわかります．「数学の勉強は好きですか」と「数学の授業の内容はよくわかりますか」という質問では，全国最下位に位置しています．

国語については良好な数値がでているので，勉強全般にネガティブな姿勢であるというわけではないようです．

また，このデータは平成 22 年度のものですが，どの年度でも同様の結果がでています．

このような状況の中で，私たちはどのように高校での数学の授業を組み立てていくべきなのでしょうか．