平成 23 年度　高校数学専門講座

「数学的活動を重視した授業」

～名刺を利用した空間座標の導入及び発展の授業例～

日時：平成 23 年 9 月 30 日(金)

場所：総合教育センター

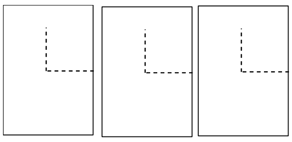
担当：学校教育室　下町壽男

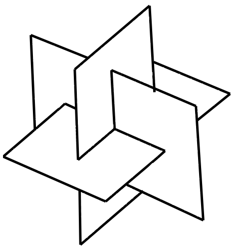
単　元

現行数学 B　空間ベクトル（空間座標）

活動の内容

図のような 3 枚の紙に L 字型の切れ目を入れ，それを組み合わせて空間座標のモデルを作成する．また，それを活用して空間座標に関するいくつかの問題を考える．





（工作用紙 6 cm × 10cm が手頃）

設定の理由及び活動の目的

①数学の問題は，意味や図形的イメージを捨象しても，代数計算などの手法で解くことができる．これは数学の良さの一つではある．しかし，問題の意味を問うことや，イメージ化により，概念の理解はより確かなものになると考えられる．

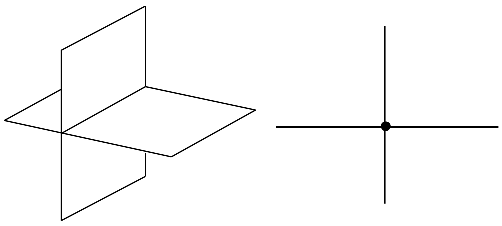
空間図形はイメージ化が難しい教材であるが，シンプルな素材で，空間座標のハンズオンモデルを作り視覚化することで，概念の理解を深めることができる．

②生徒自らが試行錯誤しながら作成する中で，様々な工夫や，考えることの楽しさを経験できる．完成時には，驚きや感動を味わうことになるだろう．また，活動の過程において，点，直線，平面の結合関係などを指導者が示すことによって，知識・技能，数学的な見方や考え方が質的に高まることも期待できる．

③作成するだけでなく，出来上がったモデルを活用して，座標空間における点の座標や，各平面に関する対称点の説明など，様々な問題のイメージ化に役立てることができる．また，発展教材として，長方形の縦横比が黄金比のとき，各頂点を結んでできる立体が正 20 面体になることを示すなど，数学の美しさを実感できる教材となる可能性も秘めている．

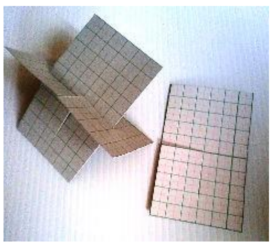
授業の展開（例）

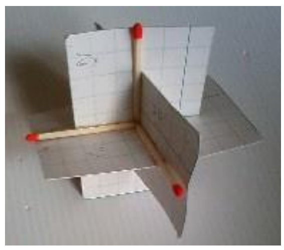
(1)　空間座標を作りながら，空間における結合公理を確認しよう



上図左のように２つの長方形（平面）を結合させると１つの直線が生まれる．また，この図形を横から見ると，長方形２つの頂点から辺（直線）ができているので，上図右のように，２つの直線が１つの点を生み出しているとも見える．

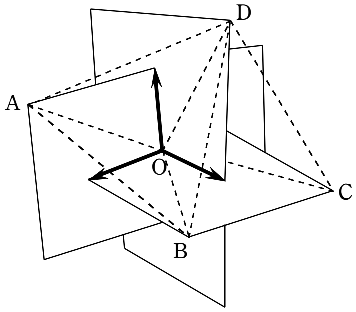
次に，2 枚の長方形を下図左のように結合してみよう．そして，残ったもう 1 枚の長方形を，切れ目の具合を考慮して，３つの平面が 1 点で交わるように組み込む．（ここが難しいが面白いところ）





それぞれ２つの平面が作る直線をマッチの軸で x 軸，y 軸，z 軸と印をつけよう．すると，平面は２つの軸（直線）によって作られていると見る

ことができるので，x 軸，y 軸，で作られる平面を xy 平面，y 軸，z 軸で作られる平面を yz 平面，z 軸，x 軸で作られる平面を zx 平面と名付ける．



上図において，3 点（ＡＢＤやＢＣＤなど）によって１つの平面ができることも追加しておく．

さて，上記の下線部分を以下のようにまとめる．

①２つの**平面**は１つの**直線**を決定する

②同一**点**を通る２**直線**は１つの**平面**を決定する．

③同一**平面**上にある２つの**直線**は１つの**点**を決定

④２つの**点**は１つの**直線**を決定する

④３つの**平面**は１つの**直線**を決定する

⑤同一**点**を通る２つの**直線**はただ１つの**平面**を決定する

⑥３つの**点**は１つの**平面**を決定する

（※２つの平面や直線が平行な場合は除く．あるいは，無限遠で交わると見る）

上の①～⑥は空間における結合公理と呼ばれる．この公理において「点」と「平面」という言葉を置き換え，それに伴って「上にある」と「通る」を適宜置き換えてみるともとと同じ公理になる．これを空間における双対の原理という．

【補足】

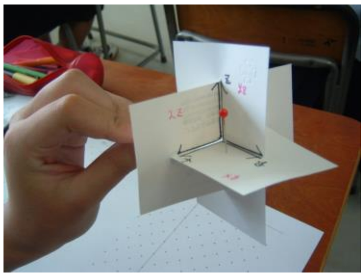
特に，3 枚目の長方形を挿入する場面で個々の生徒の作業に時間差が生じる．空間における結合公理と双対の原理は，教科書の内容を越えるが，空間座標を作成する過程で，生徒の知的好奇心を刺激することと，作業に意味を持たせるためにも，触れてみたい内容ということで取り上げた．

尚，マッチの軸には木工用ボンドを軽くつければすぐ接着される．

(2)　空間座標に点をとろう

出来上がった空間座標のモデルを使って，基本事項を調べる．

例　待針を使って点 $A(1,2,3)$ をとってみよう．



例　A の xy 平面，yz 平面，zx 平面のそれぞれに，対称な点の座標を考えよう．

【補足】

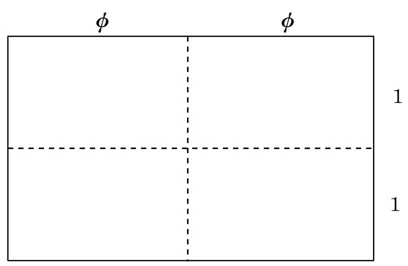
出来上がった座標空間を見ると，８つの象限に分かれていることが理解できる．平面に関する対称点をイメージするには非常に有効な教具である．いくつかの点を指導者が指定して生徒に取らせたり，2 点間の距離や分点の座標を考えさせたりする活動も考えられる．

待針は場合によっては危険なので，指導は注意が必要である．

(3)　応用・発展問題

名刺の縦横の長さが次のようになっているとする．

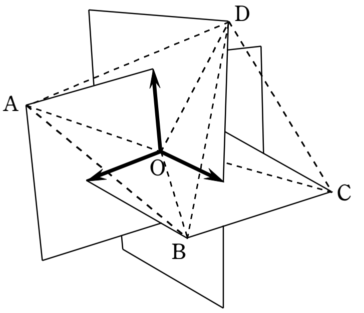
（このような長方形を黄金長方形と呼ぶ）



$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ （ϕ　は　$\phi^2-\phi-1=0$ を満たす）

このとき次の問題を考えてみよう．

①A,B の座標と 2 点間の距離 AB を求めよ



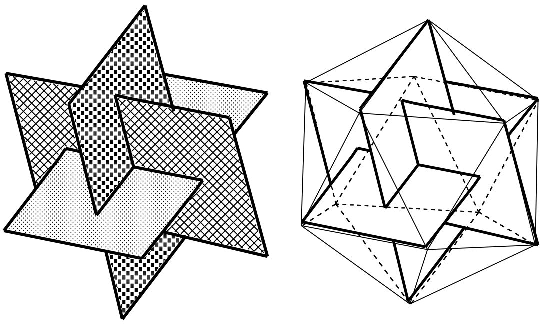
図において

$A(\phi\,,0\,,1)\,,B(1\,,\phi\,,0)\,,D(0\,,1\,,\phi)$

なので

$$AB=\sqrt{(\phi-1)^2+\phi^2+1}$$
$$=\sqrt{2(\phi^2-\phi+1)}$$
$$=\sqrt{2(1+1)}=2 \qquad (\because \phi^2-\phi-1=0)$$

②長方形の 12 個の頂点から近いものどうしの 2 点をすべて結ぶとどのような図形が生じるか.



OABD 型の四面体が 8 個, OBCD 型の四面体が 12 個できるが, 今, △ABD は①の結果より 1 辺が 2 の正三角形なので,

△ABD≡△BCD　である

よって, 得られる図形は正 20 面体である.

③②で述べた図形の体積を求めよ.

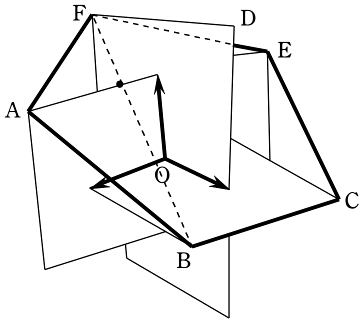
四面体 OBCD の体積を 20 倍すればよい.

$$\triangle OBCD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\phi\times\phi$$
$$=\frac{\phi^2}{3}=\frac{\phi+1}{3}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

よって体積は

$$V=\frac{10}{3}(3+\sqrt{5})$$

④下図において, ABCEF が同一平面上にあって, 正五角形になっていることを BF を ϕ : 1 の比に内分する点が直線 AE 上にあることを用いて示せ.



$B(1\,,\phi\,,0)\,,F(0\,,-1\,,\phi)$ より

BF を ϕ : 1 に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\phi\overrightarrow{OF}}{\phi+1}=\left(\frac{1}{\phi+1}\,,0\,,1\right)$$

よって P は AE 上にある.

AE と BF が1点で交わることから, A,E,B,F は同一平面上にある.

また $AE /\!/ BC$ なので A,E,B,C は同一平面上にある.

以上から5点は同一平面上にあり,

$ABCEF$ は正５角形となる.

【補足】

長方形が黄金比になっていない場合は四面体 OABC と四面体 OBCD は合同ではないので, 正 20 面体にはならない.

四面体 OABC の体積は 3 つの基底ベクトル $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ を求めて 3 次の行列式を用いれば簡単に求めることができる.

$\overrightarrow{OA}=(\phi\,,0\,,1)\,,\overrightarrow{OB}=(1\,,\phi\,,0)\,,\overrightarrow{OD}=(0\,,1\,,\phi)$

より

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\phi & 0 & 1\\ 1 & \phi & 0\\ 0 & 1 & \phi\end{vmatrix}=\frac{\phi^3+1}{6}=\frac{\phi^2+\phi+1}{6}=\frac{\phi+1}{3}$$

因みに, 対角線の長さが一定の長方形に対して, 体積が最大になるのは, 縦横が黄金比で, 正 20 面体になるときという問題が 2002 年東大の後期に出題されている.