循環小数のちょっとした話題

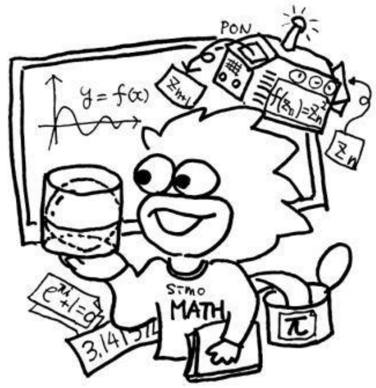
$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

ダイヤル数とは？

循環節の長さはどうやって決まる？

小数点以下50桁目の数は何？

循環小数で遊ぼう



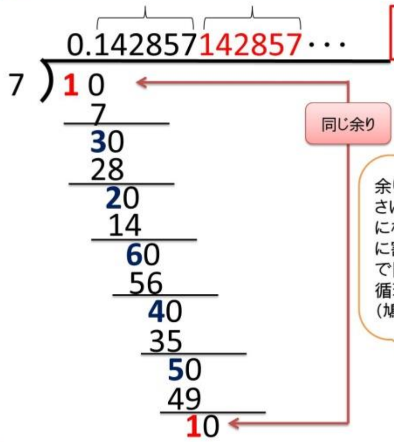
しもまっちハイスクール　下町壽男

ダイヤル数142857の不思議

142857×2＝285714
142857×3＝428571
142857×4＝571428
142857×5＝714285
142857×6＝857142

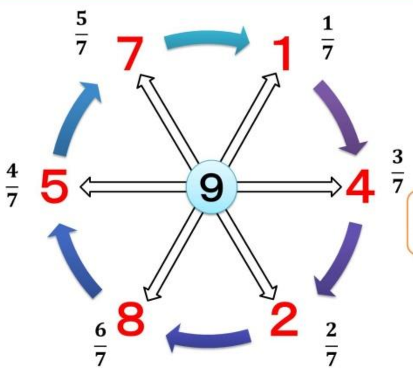
「1→4→2→8→5→7」がローテーションする。なぜだろう。

$\frac{1}{7}$ の秘密



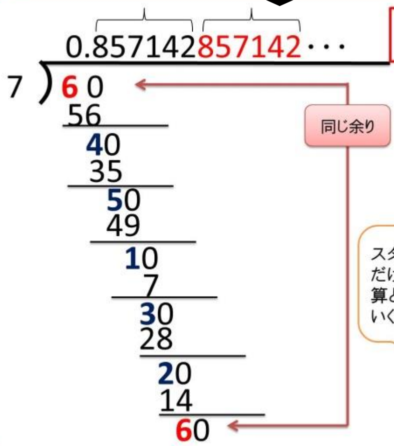
余りは割る数7よりも小さいから、0～6のどれかになる。だから、7回以内に割り切れるか、どこかで同じ余りが出てきて循環する。（鳩の巣原理）

ダイヤル数142857の不思議



スタート地点が変わるだけだよ

$\frac{6}{7}$ の秘密



スタート地点が変わっただけで、あとは1/7の計算と同じ余りをたどっていくね。

まとめ

$$\frac{1}{7} \times 6 = 0.\dot{1}4285\dot{7} \times 6$$

$$\frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$$

142857×6=857142

0.|142857|142857|142857|･･･
×6　×6　×6
0.|857142|857142|857142|･･･

6をかけても繰り上がらず、循環節のケタが変わらないのがポイント

おまけの話

142857 のもう一つの面白い性質

$142857^2 = 20408122449$

$20408 + 122449 = 142857$

$\frac{1}{p}$ の循環節の長さを考えよう。

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0.1428571\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{1}{13} = 0.0769230\cdots = \dot{0}7692\dot{3}$$

$\frac{1}{7}$ の場合

$0.142857142857\cdots$

```
      0.142857142857・・・
  7 ) 1 0
      7
      30      10を7で割った余り
      28
       20     10²を7で割った余り
       14
        60    10³を7で割った余り
        56
         40   10⁴を7で割った余り
         35
          50  10⁵を7で割った余り
          49
           10 10⁶を7で割った余り
```

1になったら終わり。これで循環節が6だとわかる

$\frac{1}{p}$ の循環節の長さを考えよう。

$10^q \equiv 1 \pmod{p}$ となる最小の q を求めればよい

$\frac{1}{13}$ の場合

$10^1 \equiv -3 \pmod{13}$

$10^2 \equiv 9 \equiv -4 \pmod{13}$

$10^4 \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13}$

$10^5 \equiv -9 \equiv 4 \pmod{13}$

$10^6 \equiv -12 \equiv 1 \pmod{13}$

$\frac{1}{p}$ の循環節の長さを考えよう。

$10^q \equiv 1 \pmod{p}$ となる最小の q を求めればよい

$\frac{1}{17}$ の場合

$10^1 \equiv -7 \pmod{17}$

$10^2 \equiv 49 \equiv -2 \pmod{17}$

$10^4 \equiv 4 \pmod{17}$

$10^8 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$

$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

$\frac{1}{p}$ の循環節の長さを考えよう。

$10^q \equiv 1 \pmod{p}$ となる最小の q を求めればよい

$\frac{1}{8}$ の場合

$10^1 \equiv 2 \pmod{8}$

$10^2 \equiv 4 \pmod{8}$

$10^3 \equiv 0 \pmod{8}$

$\frac{1}{p}$ の循環節の長さを考えよう。

$10^q \equiv 1 \pmod{p}$ とはじめてできたとする。

$10^q - 1 = pn \quad (n \in Z)$

$$\frac{1}{p} = \frac{n}{10^q - 1} = \frac{n}{10^q} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^q}}$$

べき展開だよ

$$= \frac{n}{10^q}\left(1 + \frac{1}{10^q} + \frac{1}{10^{2q}} + \frac{1}{10^{3q}} + \cdots\cdots\right)$$

ここで $n = \frac{10^q - 1}{p} < 10^q - 1$ なので（つまり高々 q 桁）

q 桁で循環していることがわかる。

小数点以下50桁目の数は

$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$

の小数点以下50桁目の数は何だろう

考え方Ⅰ　束で考える

考え方Ⅱ　筋で考える

2つの考え方を示すよ

考え方Ⅰ　束で考える

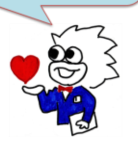
$$\frac{1}{7}=0.\underbrace{\overbrace{142857}^{6個}\,\overbrace{142857}^{6個}\cdots\overbrace{142857}^{6個}}_{8束}\,1\underset{\uparrow}{4}\cdots$$

50番目

50÷6＝8…2
だから、50番目は第9群の2番目

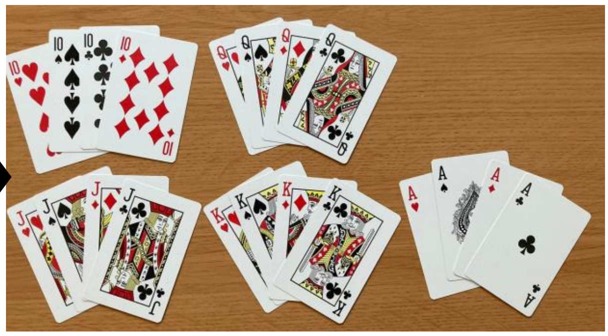
考え方Ⅱ　筋で考える

$50\equiv 2\ (mod\ 6)$
だから、50番目は4



まわる～まわる～よ♪

巡回置換を考えたカードマジック



10 JQKA の 20 枚のカードを使って 4 人がポーカーをしたら、皆ロイヤルストレートフラッシュになりました。これをシャッフルして、今度は 5 人で 4 枚ずつカードを配って再び勝負しました。すると全員が 4 カードになりました。なぜでしょう。