ICME 9
TOKYO/MAKUHARI 2000
Japan Society of Mathematical Education
Private Postbox No.18, Koishikawa Post Office, Tokyo 112 Japan/phone(03)3946-2267/fax(03)3946-3736

29

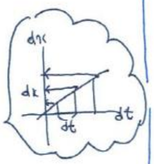
テーマ：ヤコビアンとは

＝＝大学数学のかけ橋＝＝
Visual 版 ②

ヤコビアンとは何か

導入の話（1変数の置換積分）

例えば
$S=\int_0^1 3x\,dx$ を、$t=3x$ として
置換積分してみよう
$t=3x$
$dt=3dx$
$\therefore dx=\frac{1}{3}dt$



$S=\int_0^3 t\cdot\frac{1}{3}dt$

積分範囲が変わった
長方形のタテ ヨコの長さがかわった。

この $\frac{1}{3}$ にあたるのが、重積分でのヤコビアンのようなものだ!!

本題です

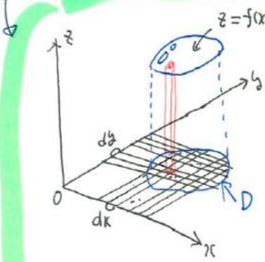
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{置換}{=} \iint_{D'} g(u,v)\,du\,dv$$

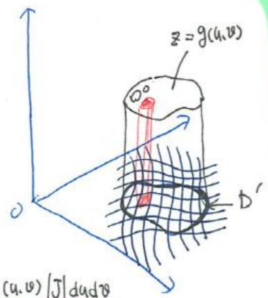
$x=x(u,v)$
$y=y(u,v)$

としたい。
ここに ヤコビアンJが入る

これがテーマ

イメージ

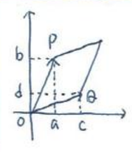




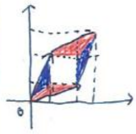
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
その領域内で加える　高さ　底面積

$\iint_{D'} g(u,v)\,|J|\,du\,dv$
その領域内で加える　高さ　底面積

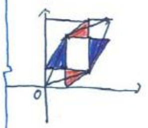
数学的基礎（行列式）



$\overrightarrow{OP}=(a,b)$
$\overrightarrow{OQ}=(c,d)$ で張られる
平行四辺形の面積
（符号付面積）

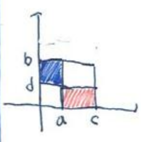


左図の様な等積変形で



$ad-bc$ と分かる!!

これを
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ とかく。

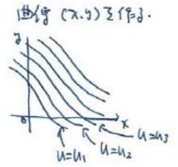


このとき
$\begin{vmatrix} ka & c \\ kb & d \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$
がいえる。

では具体的にJを求めてみよう

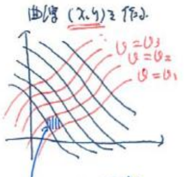
$x=x(u,v)$
$y=y(u,v)$

① $u=u_1,u_2,\cdots\cdots$ と固定して、
曲線 (x,y) を作る。

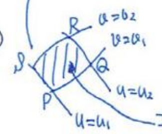


☆ u_2-u_1 が Δu （duだ）

② $v=v_1,v_2,\cdots$ と固定して
曲線 (x,y) を作る。



③



これが底面積だ
分割→0とすると、⬭PQRSは □PQRS（平行四辺形）に近い。

④ $P(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1))$　$Q(x(u_2,v_1),y(u_2,v_1))$
$R(x(u_2,v_2),y(u_2,v_2))$　$S(x(u_1,v_2),y(u_1,v_2))$

$\overrightarrow{PQ}=(x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1),\ y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1))$
$\overrightarrow{PS}=(x(u_1,v_2)-x(u_1,v_1),\ y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1))$

$\therefore \square PQRS=\begin{vmatrix} x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1) & x(u_1,v_2)-x(u_1,v_1) \\ y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1) & y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1) \end{vmatrix}$

$\leftarrow \Delta u\cdot x_u(u_2,u_1) \Rightarrow x_u\,du$

このことから、分割→0とすると、

$\square PQRS=\begin{vmatrix} x_u(u_2,v_1)\Delta u & x_v(u_1,v_2)\Delta v \\ y_u(u_2,v_1)\Delta u & y_v(u_1,v_2)\Delta v \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} x_u(u_2,v_1) & x_v(u_1,v_2) \\ y_u(u_2,v_1) & y_v(u_1,v_2) \end{vmatrix}\Delta u\,\Delta v$

分割→0として、領域D内全体で考えて

$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}du\,dv$

ヤコビアン!!