# ヤコビアンとは何か①

Ｋ：２重積分の変数変換の公式のところで、次のようなものがありました。

【定理１】

$(x\,,\,y)$ と $(u\,,\,v)$ の間の変数変換 $\begin{cases} x=x(u\,,\,v) \\ y=y(u\,,\,v) \end{cases}$ を考える。

２つの有界閉領域 $D'\subset\Omega\,,\,D\subset\varDelta$ が、写像 $\psi$ により１対１に対応しているとする。$D$ 上の連続関数に対し、

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dxdy=\iint_{D'} f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))|J|\,dudv$$

が成り立つ。

ただし、$J=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$

この　$J=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$ の意味がいまいちよくわからないのですが。

Ｔ：関数行列式（ヤコビアン）ですね。これは２変数関数の積分を変数変換を行なうとき $(x,y)$ の世界から $(u,v)$ の世界へ切り替わるときの通行手形みたいなもんです。

では今回は、このヤコビアンを通して、高校の積分と大学の重積分をつなぐ話をしてみたいと思います。

【１変数関数の置換積分】

Ｔ：まず、１変数関数の置換積分からはじめてみましょう。

例えば、$S=\int_0^1 3x\,dx$ を置換積分してみましょう。

Ｋ：えっこれをですか。

$t=3x$ とするんですね。

まず、積分範囲が変わります

| | |
|---|---|
| $x$ | $0\to1$ |
| $t$ | $0\to3$ |

次に、$t=3x$ から、$dt=3\,dx$

よって、

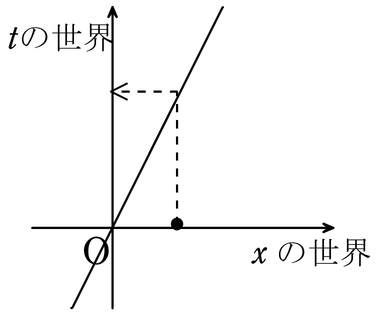
$$S=\int_0^3 t\cdot\frac{1}{3}dt$$

となります。

Ｔ：そうですね。さあ、ここでこの式を１行ずつ分析してみましょう。

まず、最初の　$t=3x$ は、$x$ の世界から $t$ の世界への写像を表しています。

図に描くとこんなカンジです。




これは、先ほどの定理１では、

> $(x, y)$ と $(u, v)$ の間の変数変換
> $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ を考える。

にあたります。

そして、上のグラフでもわかるように、$x$ の１つ１つに対して、$t$ が１対１に対応しています。つまり、$t = 3x$ （ $x$を３倍する）という規則（写像）は１対１対応になっていますね。

すると、次の行の

| $x$ | $0 \longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \longrightarrow 3$ |

は、$0 \leqq x \leqq 1$ という領域が（ $x$を３倍する）という規則（写像）によって、$0 \leqq t \leqq 3$ に１対１に移っているわけです。

ここまでの話が、【定理１】の

> ２つの有界閉領域 $D' \subset \Omega, D \subset \varDelta$ が、写像$\psi$により１対１に対応しているとする。

にあたっています。

K：なるほど。ということは、

$S = \int_0^3 t \cdot \frac{1}{3} dt$　の部分、つまり、

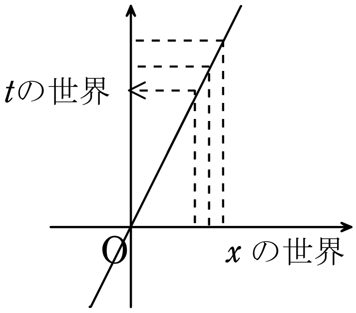
$\int_0^1 3x dx = \int_0^3 t \cdot \frac{1}{3}\, dt$ の部分が、定理１の

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J|\, du dv$$

にあたっているわけですね。

T:そうです。つまり、$S = \int_0^3 t \cdot \frac{1}{3} dt$の $\frac{1}{3}$ にあたるのが、$|J|$ というわけです。

先ほどのグラフを見ると、




$x$ の分割を等分割としたとき、$t$ の分割はその３倍になっています。

つまり、$dt = 3dx$ というのは、２つの世界における分割の関係式なんですね。

では、そういうことを踏まえて、今度は２変数関数の積分の話に進んでいきたいと思います。

# ヤコビアンとは何か②

【定理１】

$(x\,,\,y)$ と $(u\,,\,v)$ の間の変数変換　$\begin{cases} x=x(u\,,\,v) \\ y=y(u\,,\,v) \end{cases}$ を考える。

２つの有界閉領域 $D'\subset\Omega\,,\,D\subset\varDelta$ が、写像 $\psi$ により１対１に対応しているとする。$D$ 上の連続関数に対し、

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dxdy=\iint_{D'} f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))|J|\,dudv$$

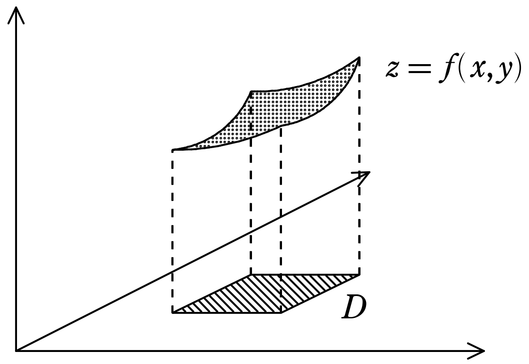
が成り立つ。

ただし、$J=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$

【重積分と体積】

T：１変数関数の場合は、 $y=f(x)$ は平面上の曲線を表すので、グラフと $x$ 軸で囲まれる面積を考えることができるわけですが、

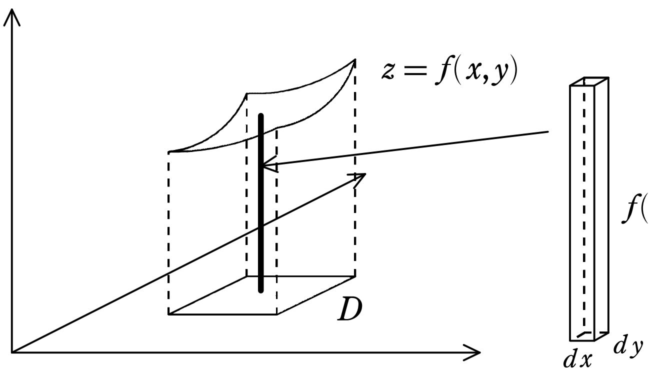
２変数関数の場合は、$z=f(x,y)$ は空間上の曲面を表しますので、曲面と、$xy$ 平面上の体積を考えることができます。




左図において、有界閉領域 $D$ の上にある曲面 $z=f(x,y)$ との体積は、重積分を用いて、

$\iint_D f(x,y)dxdy$ と表します。

体積を求める原理は、下図のように、$D$内を格子状に分割して、その上に高さが $z=f(x,y)$ の柱を立てて、その微小直方体の体積を足し合わせていくということです。




$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

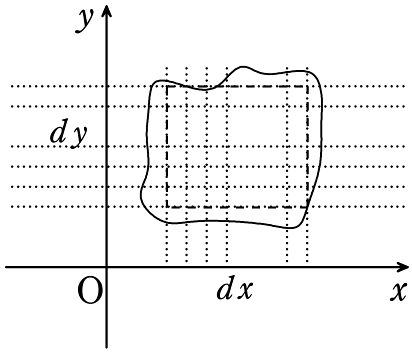
全部加える　範囲　高さ　縦　横

式のイメージは左の通りです。

K：実際の計算では、累次積分にするのですね。

T：そうです。つまり、まず、$x$ 方向に足し合わせて、$x$ 軸に平行な面を作って、それを $y$ 方向に１歩ずつじりじりと進めて加えていくか、またはその逆に考えるかです。

さて、考えている底面の領域$D$ は、細かく等分割化されています。




この領域$D$ は変数変換 $\begin{cases} x = x(u\ ,\ v) \\ y = y(u\ ,\ v) \end{cases}$ によって

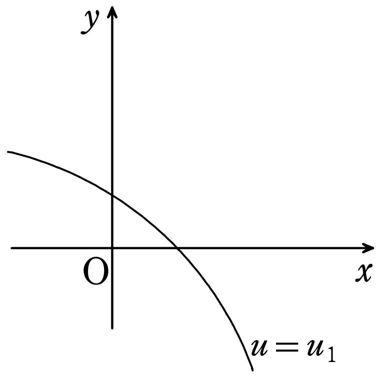
どんな分割の領域に移るでしょうか。

左図の細かい長方形を作っているそれぞれの直線が変数変換によってある曲線に変わりますから、それらの曲線で囲まれた細かな図形が新しい底面になるはずです。

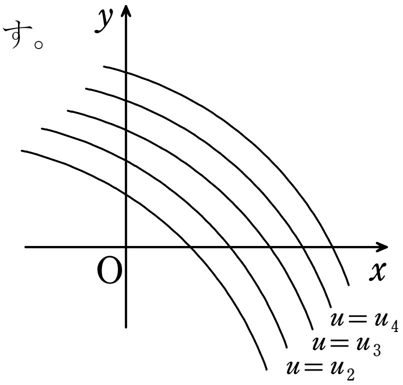
では、具体的にやってみます。

まず、$u$ を、 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ というように細かく分割します。つまり、$\triangle u = u_{k+1} - u_k$ と見るのです。そして、各$u_k$ を固定したときの曲線 $(x\ ,\ y)$ を描いていきます。

例えば、$u = u_1$ としたとき、$x = x(u_1, v)$ , $y = y(u_1, v)$ を満たす曲線が左下図のようだったとしましょう。次に今度は$u = u_2$ と固定して、同様の曲線を図示します。



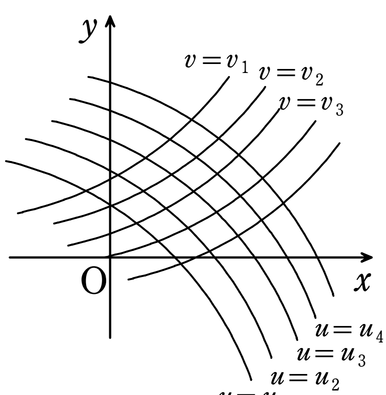

これを続けていくと、右下図のような縞模様ができあがっていきます。




K：なるほど。ということは、今度は、$v$ についても同様に、 $v_1, v_2, v_3, \cdots$ として曲線を作っていくんですね。

T：そうです。そうして新しく「ゆがんだ格子」で作られた領域$D'$が得られるわけです。

例えば、下図のような曲線に移ったとします。




こうしてできた新しいゆがんだ格子と、もとの $xy$ 平面上の格子が対応しているわけです。

K：そこで、２つの格子の面積の比較が問題になるわけですね。

T：その通りです。１変数の場合は、単に軸上の分割の対応でしたが、２変数の場合はこのように、格子とゆがんだ格子との面積の対応になるわけです。

# ヤコビアンとは何か③

【定理１】

$(x\ ,\ y)$ と $(u\ ,\ v)$ の間の変数変換 $\begin{cases} x=x(u\ ,\ v) \\ y=y(u\ ,\ v) \end{cases}$ を考える。

２つの有界閉領域 $D'\subset\Omega\ ,\ D\subset\varDelta$ が、写像$\psi$により１対１に対応しているとする。$D$ 上の連続関数に対し、

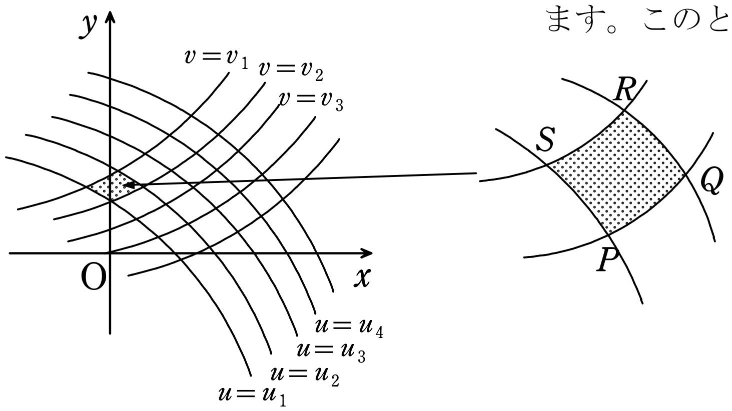
$$\iint_D f(x\ ,\ y)\,dxdy=\iint_{D'} f(x(u\ ,\ v)\ ,\ y(u\ ,\ v))|J|\,dudv$$

が成り立つ。

ただし、$J=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$

【ヤコビアン】

T：では、ヤコビアンの説明に入ります。図のように、新しいゆがんだ格子ができたとします。このとき、分割をどんどん細かくしていくと、図形$PQRS$は、ほとんど、$\overrightarrow{PQ}$ 、$\overrightarrow{PS}$ でつくられる平行四辺形の面積と変わりなくなるというのがポイントです。




ではまず、図形$PQRS$ の面積を考えてみます。

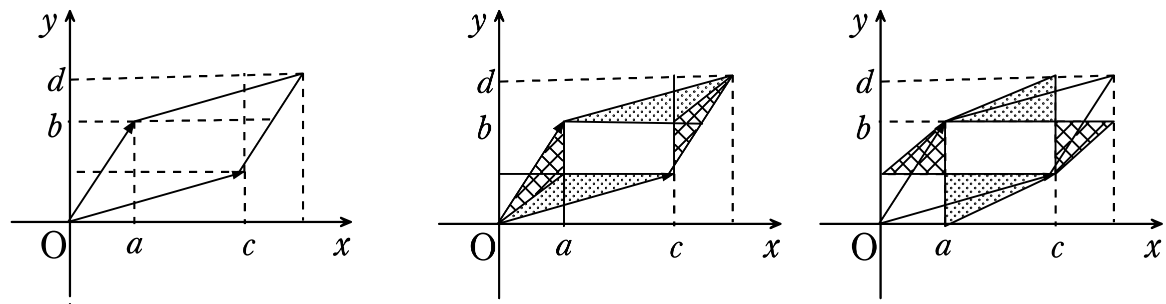
$P(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1))$ , $Q(x(u_2,v_1),y(u_2,v_1))$ , $R(x(u_1,v_2),y(u_1,v_2))$ , $Q(x(u_2,v_2),y(u_2,v_2))$

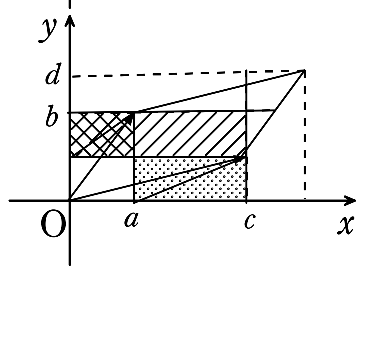
なので、 $\overrightarrow{PQ}=(x(u_2,v_1)-x(u_1,v_2)\ ,\ y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1))$

$\overrightarrow{PS}=(x(u_1,v_2)-x(u_1,v_2)\ ,\ y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1))$

ここで、$\overrightarrow{PQ}$ 、$\overrightarrow{PS}$ で張られる平行四辺形の面積ですがどう考えればよかったですか。

K：一般に、$\overrightarrow{OP}=(a\ ,\ b)$ , $\overrightarrow{OQ}=(c\ ,\ d)$ で張られる平行四辺形の面積は、次のような変形で考えます。




左図の$L$字型図形なので、$ad-bc$

つまり、行列式で表して、

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ となります。

T：そうですね。ただし、これは符号付面積なので、面積は $\left|\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right|$ となりますね。

そうすると、$\overrightarrow{PQ}=(x(u_2,v_1)-x(u_1,v_2)\ ,\ y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1))$

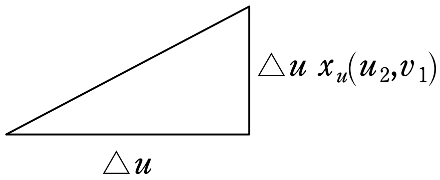
$\overrightarrow{PS}=(x(u_1,v_2)-x(u_1,v_2)\ ,\ y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1))$

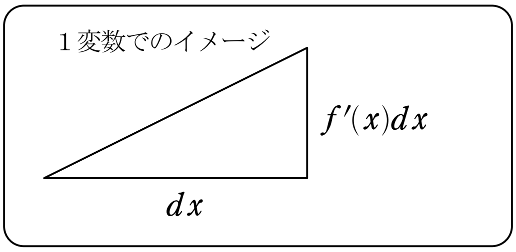
ですから、□$PQRS$の（符号付）面積は、

$$\begin{vmatrix} x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1) & x(u_1,v_2)-x(u_1,v_1) \\ y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1) & y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1) \end{vmatrix}$$

ここで、$x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1)$ は、$v$ を固定したときの、$x$ の増分ですから。分割を0に近づけると、$x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1)=\triangle u\ x_u(u_2,v_1)$ とおけます。これがポイント。

K：ええと、図に描くとこんなカンジですね。




T：いよいよフィニッシュです。

$x(u_2,v_1)-x(u_1,v_1)=\triangle u\ x_u(u_2,v_1)$　　$x(u_1,v_2)-x(u_1,v_1)=\triangle v\ x_v(u_1,v_2)$

$y(u_2,v_1)-y(u_1,v_1)=\triangle u\ y_u(u_2,v_1)$　　$y(u_1,v_2)-y(u_1,v_1)=\triangle v\ y_v(u_1,v_2)$

とそれぞれおけますから、□$PQRS$の（符号付）面積は、

$$\begin{vmatrix} x_u(u_2,v_1)\triangle u & x_v(u_1,v_2)\triangle v \\ y_u(u_2,v_1)\triangle u & y_v(u_1,v_2)\triangle v \end{vmatrix}$$

ここで、一般に、行列式において、$\begin{vmatrix} ka & c \\ kb & d \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ が成り立つので、

$$\begin{vmatrix} x_u(u_2,v_1)\triangle u & x_v(u_1,v_2)\triangle v \\ y_u(u_2,v_1)\triangle u & y_v(u_1,v_2)\triangle v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_u(u_2,v_1) & x_v(u_1,v_2) \\ y_u(u_2,v_1) & y_v(u_1,v_2) \end{vmatrix}\triangle u\triangle v$$

これを領域$D'$内全体で考えた式が、

$\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} dudv$　となるわけです。

K：ついにヤコビアンが登場しましたね。$J=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix}$ とおけば、

変数変換した体積は、

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dxdy=\iint_{D'}\underbrace{f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))}_{\text{高さ}}\underbrace{|J|\,dudv}_{\text{底面積}}$$

というように変換されたことがわかりました。

2002年　しもまっち