入魂の朝課外シリーズ

２００２東大後期の問題に挑戦～空間の問題の把握～

xyz 空間において次のような３つの互いに合同な長方形 L_1, L_2, L_3 を考える。

● L_1 はxy 平面に含まれ、$P_1(a, b, 0)$, $Q_1(-a, b, 0)$, $R_1(-a, -b, 0)$
$S_1(a, -b, 0)$ を頂点とする

● L_2 はyz 平面に含まれ、$P_2(0, a, b)$, $Q_2(0, -a, b)$, $R_2(0, -a, -b)$
$S_2(0, a, -b)$ を頂点とする

● L_3 はzx 平面に含まれ、$P_3(b, 0, a)$, $Q_3(b, 0, -a)$, $R_3(-b, 0, -a)$
$S_3(-b, 0, a)$を頂点とする

ここで、$a>b>0$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1)　$\triangle P_1P_2P_3$ の面積、および、$\triangle P_1P_2P_3$ と原点 O との距離を求めよ。

(2)　四面体 $OP_1P_2P_3$ および、四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積をそれぞれ求めよ。

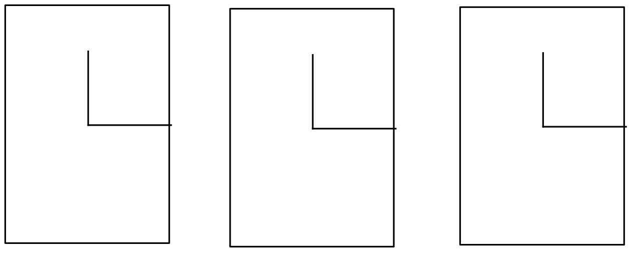
(3)　L_1, L_2, L_3 の12頂点から３点を選び三角形を作る。このとき、$\triangle P_1P_2P_3$ または、$\triangle P_1P_2S_2$ と合同な三角形が20個得られる。これらの三角形で囲まれる２０面体をD とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ なるθに対して、

$$a=\cos\theta\ ,\ b=\sin\theta$$

とおくとき、D の体積 V を $t=\tan\theta$ の関数 $V(t)$ として表せ。

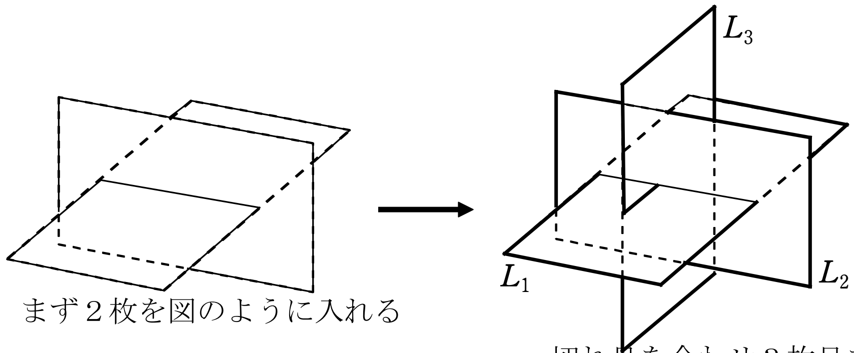
(4)　$0<t<1$ において、$V(t)$ は最大値をとることを示し、そのときの t の値を求めよ。

Ｔ：東大理系後期の問題というとちょっとびびりそうですが、この問題はいたって素直、簡単です。この問題の面白いところは、３つの長方形をクロスさせて３次元空間を作るというところです。ちょっと見て下さい。模型を持ってきました。



この板の素材はウレタンで、結構自由に曲げ伸ばせるのがいいところです。この板には、このようにＬ字形に切れ目が入っています。この切れ目の具合を見ながら、問題にあるような空間座標を作ることができます。

（実演）



まず２枚を図のように入れる

切れ目を合わせ３枚目を入れる

ここに、切れ目入りの名刺を用意しています。皆も作ってみてごらん。

この模型は３次元空間を説明するのにもってこいです。

Ｓ：L_1 が xy 平面、L_2 が yz 平面、L_3 が zx 平面なのですね。

Ｔ：そう。そして、L_1 と L_2 の交線が y 軸、L_2 と L_3 の交線が z 軸、L_3 と L_1 の交線が x 軸になっていることに注意して欲しい。

Ｓ：そして、L_1, L_2, L_3 の交点が原点なのですね。

Ｔ：そうです。なんでもないようだけれど、この図を作るだけで、空間についての結合公理を実感できます。

Ｓ：空間についての結合公理って何ですか。

Ｔ：点と直線と平面の結合関係のことです。具体的には、

①　２つの点で１つの直線が決定する。
②　平行でない２平面は１つの直線を決定する。
③　同一直線上にない３点は１平面を決定する。
④　互いに平行でない３平面は１つの点を決定する。
⑤　１点を通る２直線は１つの平面を決定する。
⑥　１平面上にある平行でない２直線はただ１点で交わる

といったものですね。先ほどの図で x 軸、y 軸、 z 軸が決まるのは上の公理の②によるし、原点が決まるのは④によるわけです。

Ｓ：あたりまえのようですが、何か似たような言葉遣いがでてきて難しそうです。

Ｔ：そうですか、面白いのは、①と②、③と④、⑤と⑥において、「点」という言葉と「平面」という言葉が入れ替わっているところです。これを「空間における双対の原理」といいます。このような結合公理から新しい幾何学を構成していく話はとても面白いです。私が大学の頃、読んだ本に「幾何学の基礎／ヒルベルト」というものがありました。この中に「点•直線•平面」を無定義用語としてその結合関係の公理から幾何学を構成していくという話があり、とても感銘を受けた記憶があります。皆さんも、もし、大学に入って数学をやるようだったら是非読んで欲しい本の一つですね。ちょっと話が脱線しすぎました。では本題に入りましょう。

Ｔ：(1)(2)は難なく終わると思います。やってみてください。

Ｓ：(1)　$P_1P_2=\sqrt{a^2+(b-a)^2+b^2}=\sqrt{2a^2-2ab+2b^2}$

$P_2P_3=\sqrt{b^2+a^2+(b-a)^2}=\sqrt{2a^2-2ab+2b^2}$

$P_3P_1=\sqrt{(a-b)^2+b^2+a^2}=\sqrt{2a^2-2ab+2b^2}$

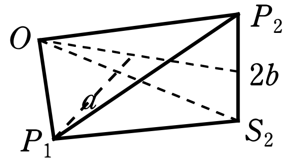
よって、$\triangle P_1P_2P_3$ は正三角形。

$\triangle P_1P_2P_3=\dfrac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2)sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2-ab+b^2)$　答

O から $\triangle P_1P_2P_3$ に垂線を下ろした足を H とすると、H は $\triangle P_1P_2P_3$ の重心になるので、$H\left(\dfrac{a+b}{3},\dfrac{a+b}{3},\dfrac{a+b}{3}\right)$　　$OH=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{9}\times 3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a+b)$　答

(2)　◇$OP_1P_2P_3=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2-ab+b^2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a+b)=\dfrac{1}{6}(a^3+b^3)$

◇$OP_1P_2S_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2ba\times a=\dfrac{1}{3}a^2b$　答



（$\triangle OP_2S_2$ を底面と見る）

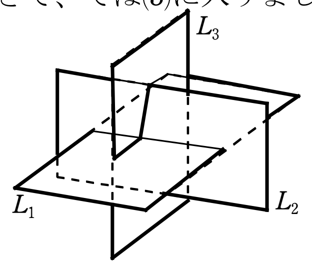
Ｔ：ここでちょっと補足しましょう。

「大学数学への架け橋」をよく読んでいる人は、この体積を次の行列式によって一発で求めることもできるのです。実際の受験ではこんな方法で求める人はいないと思うのですが参考までにあげておきましょう。

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{OP_1}\\ \overrightarrow{OP_2}\\ \overrightarrow{OP_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ b & 0 & a\end{pmatrix}$$ より、◇$OP_1P_2P_3=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ b & 0 & a\end{vmatrix}=\dfrac{1}{6}(a^3+b^3)$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{OP_1}\\ \overrightarrow{OP_2}\\ \overrightarrow{OS_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & a & -b\end{pmatrix}$$ より、◇$OP_1P_2S_2=\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & a & -b\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{3}a^2b$

Ｔ：さて、では(3)に入りましょう。図において、頂点の数は、12個ですねこれらの点から３点を選び三角形で覆っていくと20面体ができるのがわかりますか。



Ｓ：$OP_1P_2P_3$ 型よりも、$OP_1P_2S_2$ 型の個数の方が数えやすいです。

L_1, L_2, L_3 各板の短い辺２つに対して、$OP_1P_2S_2$ 型の四面体が２個できるので、全部で６×２＝12個ですね。よって、$OP_1P_2P_3$ 型が８個、$OP_1P_2S_2$ 型が12個です。

D の体積 $V(t)$ は、$V(t)=\dfrac{1}{6}(a^3+b^3)\times 8+\dfrac{1}{3}a^2b\times 12=\dfrac{4}{3}(a^3+b^3+3a^2b)$　です。

Ｔ：あとは、$a=cos\,\theta$、$b=sin\,\theta$ として、V を $tan\,\theta=t$ で表せばいいのです。

S：$\dfrac{b}{a}=tan\ \theta$ なので、$\dfrac{b}{a}$ 作ればいいですね。

$$V=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a^3}\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3+3\frac{b}{a}\right\}=\frac{4}{3a^3}(t^3+3t+1)$$ a^3 がじゃまですね。

T：$1+tan^2\theta=\dfrac{1}{cos^2\theta}$ を使う。

S：そうか。$1+t^2=\dfrac{1}{a^2}$ よって、$a^2=\dfrac{1}{1+t^2}$　$\therefore a^3=\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$

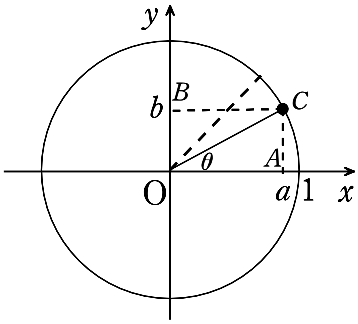
よって、$V(t)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(t^3+3t+1)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$　$\boxed{\text{答}}$

T：さあ、いよいよフィニッシュですね。

T：$V(t)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(t^3+3t+1)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$　と $V(t)$ が求まりましたから、あとは微分して増減表を作ればいいですね。

S：この t はどんな意味があるのですか。

T：$a=cos\ \theta$, $b=sin\ \theta$ だから $(a\ ,b)$ は単位円周上の点になります。



つまり、図のような長方形$OACB$を作ったとき、辺の比をどのようにすれば体積が最大になるかということを考えているわけです。

なお、$a>b>0$ なので

$t=\dfrac{b}{a}<1$ より、$0<t<1$ であることに注意して下さい。

S：なるほど。つまり、３つの長方形の板 L_1 , L_2 , L_3 を、対角線を一定（１）にしておいたとき、縦横がどんな比になっていれば体積が最大になるかということを考えているんですね。

T：そうです。では解いてみましょう。

S：$$V'(t)=\frac{4}{3}\cdot\frac{(3t^2+3)(1+t^2)^{\frac{3}{2}}-(t^3+3t+1)\cdot\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t}{(1+t^2)^3}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3(t^2+1)(t^2+1)-3t(t^3+3t+1)}{(1+t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ここで、分母＞０で定符号なので、分子＝$f(t)$ とおいて、この符号を調べます。

$f(t)=3(t^2+1)(t^2+1)-3t(t^3+3t+1)=-3t^2-3t+3$

$f(t)=0$ とすると、$t^2+t-1=0$　$\therefore t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

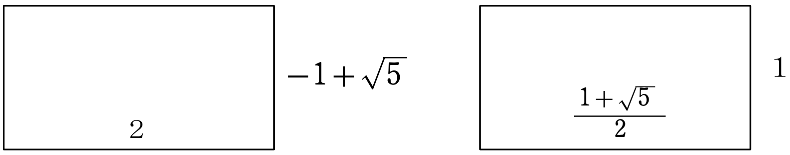
よって、$t=\dfrac{b}{a}<1$ より、$0<t<1$ であることに注意して、$V(t)$ の増減表を作ると、

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	最大	↘	

よって、$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大になる。答

T：さて、ここで得られた　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ に対する長方形はどんな形でしょう。

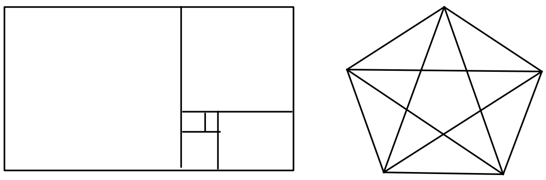
S：左図のような形ですが、高さの方を１とすると、右図のような比です。



T：この縦横の比である$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.6$ を何ていうかわかりますか。

S：たしか黄金比でした。

T：そうです。黄金分割とか黄金比とかいいます。ちなみに上の様な長方形を
黄金長方形（Golden Rectangle）といいます。
黄金長方形には面白い性質があって、図のように、短い方の辺を１辺とする正方形を切り取ったときにできる残りの長方形もまた黄金長方形になります。また、正五角形の辺と対角線の比も黄金比になります。



S：話題はつきないですね。

T：一般の名刺の縦横の比は黄金比になっているので、この問題の３つの板は実は名刺型であったわけです。

ところで、$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、$t^2+t-1=0$ に注意すると、

$$P_1P_2=P_1S_2=\sqrt{2a^2\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)}=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-t+t^2}=\sqrt{2}\,a\sqrt{2t^2}=2at$$

$$=2a\cdot\frac{b}{a}=2b$$

つまり、$\triangle P_1P_2S_2$ は正三角形になります。つまり、２０個の四面体は全部正四面体になるわけです。

S：ということは、立体D は正20面体ということですね。

T：そうです。黄金長方形を組み合わせてできる３次元空間座標の各頂点を結んで作られる多面体は正20面体になるという美しい問題だったわけですね。