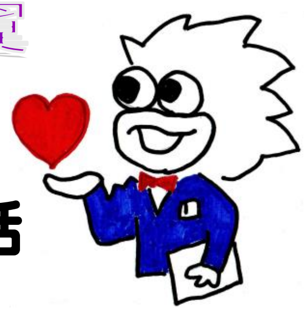
第25回　2016年12月

数列の漸化式と紙を３等分する話



１　深く確かな理解

この８月、千葉工大で行われた数学教育協議会の全国研究大会で、琉球大学の伊禮三之先生から次のような興味深いお話を伺いました。

> 数学の公式や、解法パターンなどの知識記憶は、文脈が変わると引き出しにくくなるような潜在的なものである。それを、引き出しやすいものにするには、操作活動などを通して、経験記憶化することが必要である。

また、初日に行われた記念講演会では、三重大学名誉教授・岐阜聖徳学園大教授の上垣渉先生から「教師であるための授業づくり七か条」というテーマでお話がありました。

その中で、「言葉で理由を説明する活動」の意義として、コミュニケーション力の向上、論証に進む第一歩であるとともに、人に説明することで、「内容のより深い理解に進む」ということが話されました。

これらの話を聞いて、なるほどと思い当たることがありました。

それは、以前、某人物が、ある会見で「女性にサインコサインを教えて何になるのか」という話をして物議をかもしたことに関するものです。ニュースでも結構大きく報道されたので、ご存知の方がいるかもしれませんね。

その発言者は、釈明会見の場で次のように述べています。

「私もサインコサインというのは人生で１回使いました。『私の足がもし15cm長ければ、私はボルトぐらいのスピードで100mを走れます。』ということで、一歩一歩、凄い回転が早ですからね。そのときぐらいしかサインコサイン使っていないよね、と。」

私は、最初この話を聞いたとき、「?」が頭を駆け巡りました。「足が15cm長い」ことと「ボルトと同じスピードで走れる」にあまりにも論理の飛躍があり、どう考えても荒唐無稽な話ではないだろうか、と眉をひそめました。

でも、それと同時にわかったことがあります。彼は、三角関数の公式なんかは、きっと覚えていないだろうし、価値を感じていないかもしれないけれど、誰かが円運動と三角関数を絡めて話したと思われる「ボルトのエピソード」だけは、しっかり「取り出される記憶」に入っているんだ、ということでした。

三角関数の知識は記憶に残っていなかったけれど、余談的に話されたことは（曲解されてはいるが）しっかり残っていたというわけですね。

さて、私はその後、今度は「教具展」に出かけ、折り紙サークルの方から、とても面白い話を伺うことができました。

それは、１枚の紙を５等分する技法です。その数学的な香りに感心していると、折り紙界では常識であるとのことで、更にびっくりしました。

ああ。折り紙業界、あなどれん。

私は、この日の翌日、茨城県の数学部会で講演を行う予定になっていたのですが、急遽、この折り紙の話を、数列の漸化式とからめて「深い学び」という文脈の中で取り上げることにしました。

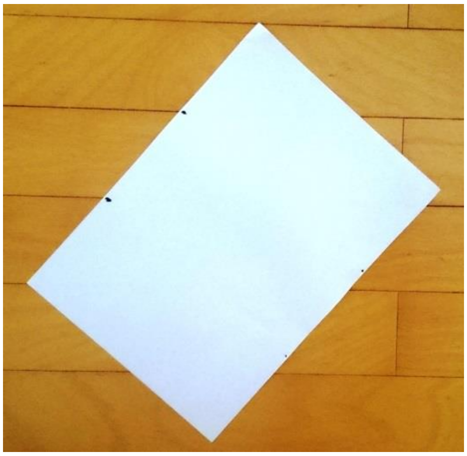
以下にそれを示したいと思います。５等分だと煩雑なので、簡単のために、３等分で説明します。

２　A4 の紙を三等分するワザ

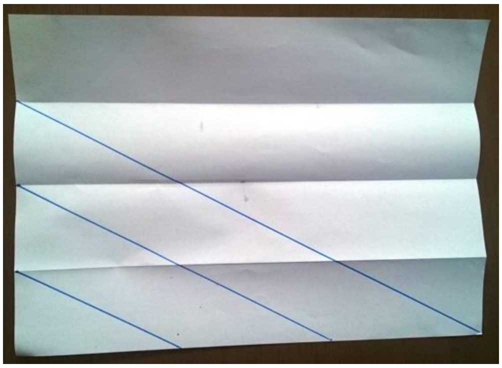
これは、私が授業の導入やアイスブレイクでよく取り上げる問いです。定規で長さを測って三等分する以外の方法を考えてもらいます。

これまでの授業では、こんな解答がでてきました。

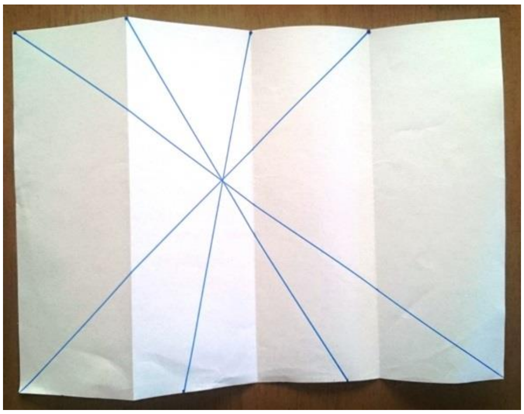
①床板の平行線に斜めに合わせる



②縦を４等分して比を移す

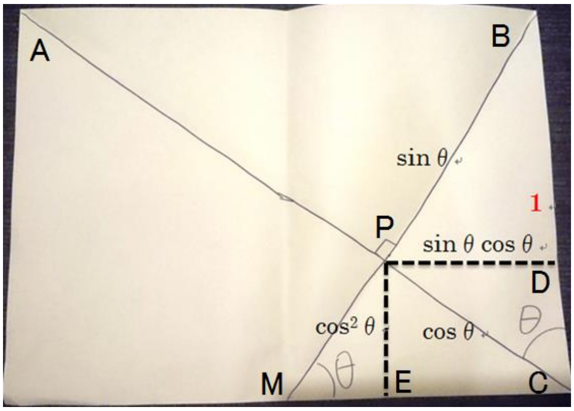


③上を４等分して比を移す



オマケとして、ある生徒が考えた紙をグルグル巻きする方法です。３回巻きしてえいやっと折り畳み６分割をつくるというもの（笑）。

もう一つ。A4 の紙だと次のように三角関数の勉強にもなります。



AC とBM を折り、その交点P を考えます。

∠ACB＝θとすると、$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \sqrt{2} : 1$ から

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、$\mathrm{CD} = cos^2\theta = \frac{1}{3}$　$\mathrm{CE} = \sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

なんと、縦横の3等分点が一気に求まりました。

３　折り紙サークルの技法

お待たせしました。いよいよ、折り紙サークルの方の手法を紹介します。

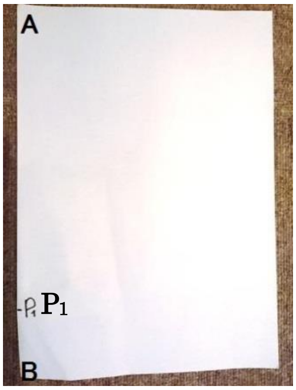
まず、任意に、3等分と思われるところを折ります（図1）。これをP_1 とします。これが最初の3等分点候補です。かなりテキトーにとりました。

ここで、AP_1 を2等分し、P_2 を決めます。P_2 は２番目の3等分点候補になります（図2）。

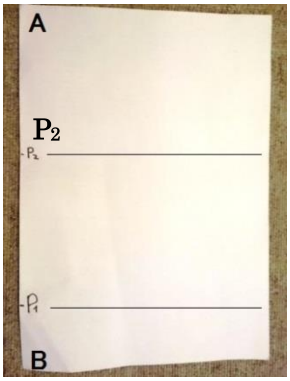
今度は、$\mathrm{P_2B}$ を２等分して、$\mathrm{P_3}$ を決定します。$\mathrm{P_3}$ は3番目の3等分点の候補です（図3）。

次に、$\mathrm{AP_3}$ を2等分し、$\mathrm{P_4}$ を決めます。$\mathrm{P_4}$ は4番目の3等分点候補になります（図4）。

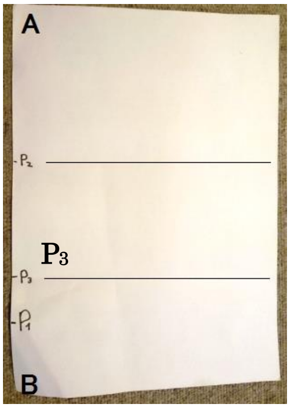
【図1】



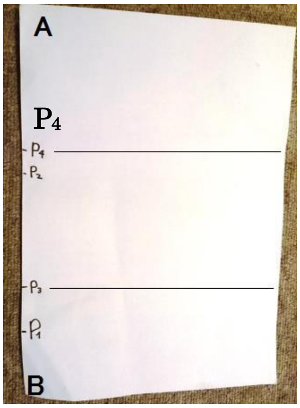
【図2】



【図3】



【図4】



この操作を繰り返すと、どんな折り方からスタートしても、数回で、同じ点に一致します。ちなみに5等分の場合は、２等分するところを4等分（半分の半分）にすればいいですね。

このような、再帰的な操作は、漸化式を用いて表現することができます。

$\mathrm{P_1B} = a_1, \mathrm{AP_2} = a_2, \mathrm{P_3B} = a_3, \mathrm{AP_4} = a_4 \cdots$

とし、AB=1 とすると、次の漸化式が成り立ちます。

$$a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$$

$$\left(a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\right)$$

この漸化式から一般項を求める過程を意味づけしてみましょう。

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right) \cdots ①$$

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(a - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ②$$

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(a - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ③$$

① 特性方程式から $\frac{1}{3}$ を求め式を変形

これは、3等分点からの差を評価する式です。

誤差が前の項の半分に縮まることを示しています。

② 初項を a とする

①より $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $a - \frac{1}{3}$ 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列です。この式から、n が大きくなると、３等分点からの差がどんどん０に近づいていくことが直感的にわかります。

③ 一般項を求める

n が大きくなると、a_n は $\frac{1}{3}$ に収束していくことが納得できます。

漸化式から一般項を求める技法は、授業の中で繰り返し強調されます。でも、ドリルだけで叩き込まれた知識は、その後、恐らく忘れ去られてしまうのではないでしょうか。

もしかしたら、「漸化式なんて教えて何になる」と言う人がでてくるかもしれませんね。

しかし、ここで紹介したような活動を経験することで、漸化式を立てることの意味や良さに気づき、「内容のより深い理解」につながっていくのではないかと考えられます。

そして、このような数学的な経験によって身体化された知識は、生きて働く深みのあるものとして、その人の人生を楽しく、豊かなものにしていくと思うのです。私はそれを「数学という名の自由の翼」と呼びたいと思います。