数学という名の自由の翼

第24回　2016年11月

群数列は試行錯誤で

昨年、私が住んでいた洋野町の方から、地域存続のための取組みとして、地域が一体となって「東大を目指す生徒をつくる運動をしよう」という声があがったことがありました。実は、今勤務している地域でも、東大合格者を輩出するために、中学校と高校における何らかの連携を求める声があります。

私は、その気持ちは理解できないわけではないのですが、もし、それを実現するのであれば、中高で何かを始める前に、もっと幼少の段階で子どもたちに働きかけていかなければならないと思います。

でもそれは、幼少時からスペシャルメニューを与え、徹底ドリルによってたたき上げる、などという発想では絶対にうまくいきませんよね。そんな「注入志向」では先に子どもがつぶれてしまいます。

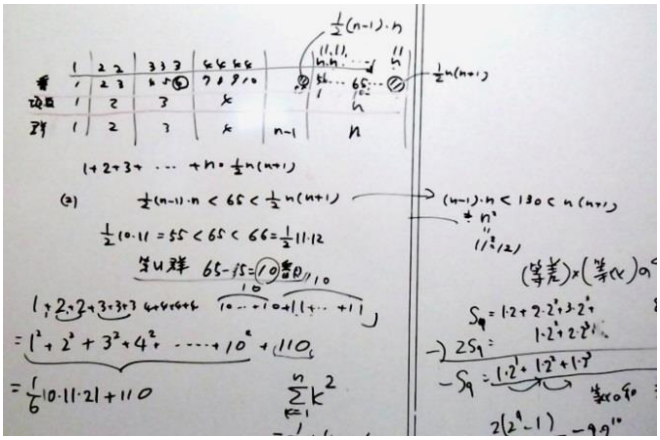
そうではなく、もっと、子どもたちの知的好奇心を耕し、彼らの中に眠っているすぐれた能力を発見し、それを自らが磨いていくための手助けをするというのであれば、私は行う価値があると考えます。なぜなら、それは、東大やハーバードを目指すという旗を掲げたとしても、実際は子どもたちの可能性を広げ、学びに夢中にさせるという別の価値を生みだすことにつながると思うからです。

さて、ここで、話は変わるのですが、かつて勤務していた学校で、期末考査前に、ある問題がわからないということで、こぞって職員室の某先生に生徒達が質問に来ていたことがありました。試験前になるとこういう光景はよく目にします。

そのわからないという問題は、次のような群数列に関するものでした。

> 第 n 群に n が n 個並ぶような群数列を考える。
> 1|22|333|4444|55555|・・・・・・・・
> このとき、65 番目の数は何群の何番目か。
> また 65 番目までの総和を求めよ。

下の写真は、その先生が、質問に来た生徒にホワイトボードで解説していたものです。



彼によると、「群数列」の問題を見たら、必ず図のような「数列・順番・項数・群番号」に着目した 4 次元表をつくれ！と力説されていました。でも、生徒たちは、先生の解説にあまり納得していないようでした。

私がその光景を見て思ったのは、なぜ多くの先生は簡単なことを難しく教える方向で指導するのだろうということです。

私は、写真のような解法で指導しても、生徒には納得感や成就感が生まれるとはどうしても思えないのです。

なぜなら、これは「一つの解法の記述の理解」という指導にすぎず、決して解を得るために探究していく方向ではないからです。

確かに数学の良さの一つは、公式化や解法のパッケージ化をすることです。そうすることで、意味、概念や、もっといえば考えることさえも放棄して、「手で解く」ことができるということです。

しかし、最初からそのような便利な手順を用意して、それをなぞるような指導をすることでは、深い学びに到達することはできないし、問題を解き終えた後に得られる達成感や満足感のようなものを体験するという数学の醍醐味も味わえないと思うのです。

センター試験に行く前に、こんなことを言う先生をよく見かけます。

「いいか。数列や確率の問題は『書きあげ』だ。書きあげれば少なくとも(1)はできる！だからまず書きあげてみるんだ！」

私は、その考えに異論を唱えようとは思いません。試行錯誤によって、何らかの手がかりを得ようという態度は、ポジティブであろうと思います。

しかし、そのようなことを言う先生が「書きあげ」の経験を積ませるような授業をしているのを私はあまり見たことがありません。ほとんどが、解法スキルを向上させる教え込みです。そんな、授業で経験させたことのないことを本番前に「やれ」というのはどういうものなんでしょう。

さて、話を戻します。私は、この問題の前半部分を、小学生に、モノを使って遊びながら考えさせてみたらどうなるか興味があります。

もちろん「n」なんて文字や、２次不等式などはお呼びではありません。

「ある群には何個の数字があるか」

「ある群の最後の数まで項が通算で何個あるか」

という問題意識さえあれば試行錯誤によって解決できるのではないかと思います。小学校の先生のどなたか、チャレンジさせてみていただけませんでしょうか。

例えば、ピラミッド型に数をどんどん書き上げていって、「何群目」を「何段目」などと読み替えれば問題の意図している内容が子どもたちにも伝わるはずです。

私は、このような経験によって「考えることの楽しさ」を子ども達は学ぶのではないかと思います。

そして、それは知的好奇心を耕し、彼らの中に眠っているすぐれた能力を発見することにもつながるかもしれません。

逆にいうと、公式化や解法のパッケージ化の指導に慣らされ、それが「身体化」されてきてしまった高校生は、このような問題に対して「試行錯誤すること」さえできなくなっているのではないかと思うときもあります。

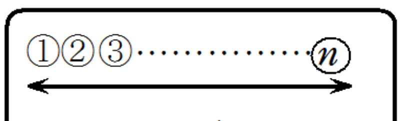
それは極論かもしれません。しかし、純粋に「考えること」「試行錯誤すること」などの経験なしに、いきなり４次元表や、n の２次不等式などでパターン化された解答をなぞっていくことが、問題の本質を見えにくくさせ、群数列への苦手意識を生み出しているのではないかと私は思うのです。

小学生風の解答は次のようになるでしょう。

1 群の終わりまで項の数は　1 個
2 群の終わりまで項の数は　1+2=3 個
3 群の終わりまで項の数は　1+2+3=6 個
4 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4=10 個
5 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5=15 個
6 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5+6=21 個
7 群の終わりまで項の数は 1+2+3+4+5+6+7=28 個
8 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8=36 個
9 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 個
10 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 個
11 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66 個

このような活動から、65 番目は 11 群の 10 番目であることがわかります。

この解法を、今度は、高校生風にアレンジしてみましょう。



私は上の図を群数列の問題を考えるための水源地にし、「弓道ではなくゴルフで」という言葉をキャッチフレーズとしてよく用いています。

弓道は、直接「まと」をターゲットにすますが、ゴルフはティーショットからいきなりカップは狙いませんよね。まず、グリーンをめがけて「この辺」というカンジで打ちます。そして、刻んだり、時にターゲットをオーバーしたりしながら、カップインを目指します。

例えば、上の※式のnに 20 を入れてみます。

210 となります。ターゲットは 65 なので、メチャオーバーですね。じゃあ $n=10$ としてみます。

55 となりニアピンです。$n=11$ とすると、66 となりカップを僅かオーバー。このように考えれば、たいがい数回の試行錯誤で解答に到達します。

では、この考えを基にした高校生風の解答を以下に記していきます。

【解答】

第 1 群から第n 群までの項の総数は

$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 個

$n=10$ のとき、※は

$\frac{1}{2}\times 10\times 11=55$ 個より

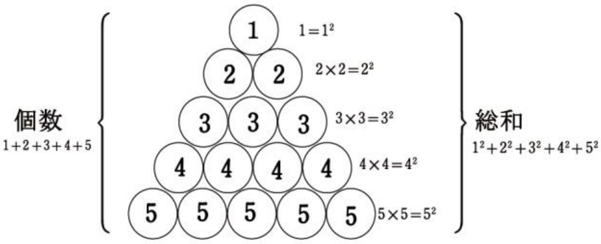
65 番目は、第 11 群の 10 番目である。(答)

求める和をＳとすると

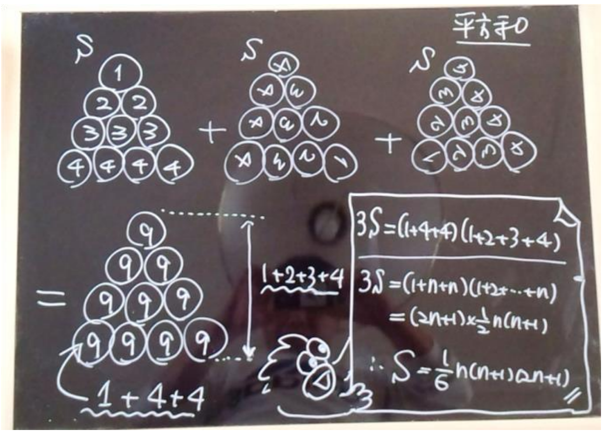
$$S=1+2\cdot 2+3\cdot 3+\cdots+10\cdot 10+11\cdot 10$$
$$=1+2^2+3^2+\cdots+10^2+110$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21+110=495$$ (答)

群数列の指導では、問題を解いた後に「群数列とは数字を２次元に配列したもの」と捉えるような活動を取り入れたいと思います。

今回の問題は、次の図のように、同じ数字を三角形に俵積みして書きならべたものとみることもできます。



このような俵を３つ用意して、120 度回転させて並べ、対応する項の値を加えるとすべて同じ数になります（下写真参照)。



つまり、

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2)=(1+4\times 2)(1+2+3+4)$$

がいえます。これをn 段の場合について考えると、

$$3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=(1+2n)(1+2+\cdots+n)$$

$$3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=(1+2n)\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって、

$$1^2+2^3+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

平方和の公式を簡単に導くことができました。

教師は、模範解答を解読する指導だけでなく、その背景にある意図や、周辺にある面白さなどを同時に見せることで、知的好奇心を喚起し、自分から学び続けようとする子どもを育てていくことができるのではないでしょうか。それは、東大に合格する一部の生徒を輩出させる取組みより何倍も意義がある、すべての子どもたちが「数学という名の自由の翼」を身につけることになるのではないかと思います。