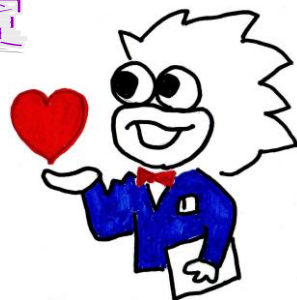


数学という名の自由の翼

第21回

2016年8月

28と2016の親和性



1 新年の年賀状の話から

もうかなり前のことになってしまいましたが、平成 28 年、西暦 2016 年、申年を迎えた新年の年賀状にこんなことを書きました。

「無限の猿定理 (infinite monkey theorem)」をご存知ですか？ランダムに続く無限の文字列の中には、どんな (有限の長さの) 文字列も含まれるという数学の測度論に関する定理です。

例えば円周率はランダムな無限数列ですが、

2016 年 1 月 1 日、つまり 20160101 という数列は、63,502,852 桁目から現れます。「猿がランダムにキーを叩き続けた文字列の中にはシェイクスピアのハムレットさえも含まれる」という例えによって示されることから「無限の猿定理」と呼ばれます。

これをピアノで考えると、ランダムに弾き続けるとうどんな音階もその中に含まれるというわけですね。(ただし単音で長さを考慮しないとする)

でも、実際は、猿にもクリシェ (手癖) があるでしょうから、決まりきったパターンしか生じなかつたりすると思いますが。

さて、この「無限の猿定理」を、「能力」のメタファーとして考えてみます。すると、猿は「何にでもなれる可能性を秘めている存在」と見ることができます。そこに「学び」が行われることで、デタラメさを乗り越え、意味のある文字列 (思考) が形成されていく。それを「能力」というものかもしれません。しかし、教師の過度な「一方的教え込み」が行われれば、教授者の期待に応えるだけの、パターン

化された列 (思考) しか生成しなくなり、結果、本来有していた自由な発想や、自分で考える楽しさが失われていくのかもしれない。



2 28と2016の親和性

新年を迎えた早々に、平成 28 年と西暦 2016 年の数字遊びをしていたら、面白いことがわかりました。

とりあえず、2016 を素因数分解します。

$$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$$

これを組み替えて 2 数の積にすると、

$$2016 = 28 \times 72$$

何と、2016 年に平成 28 年が含まれている！

「面白い」。思わず呟いてしまいました。

また、2016 は、

$$2016 = 32 \times 63$$

とも分解できます。因みに、 $28=4\times 7$ なので、ここにも28と2016の親和性が見つかりました。

わかりますか。この形はどちらも、 $\frac{n(n+1)}{2}$ の形なので、1からの連続数の和にできるのです。

$$\begin{aligned} 28 &= 7 \times 4 = \frac{7(7+1)}{2} \\ &= 1 + 2 + \dots + 7 \\ 2016 &= 63 \times 32 = \frac{63(63+1)}{2} \\ &= 1 + 2 + \dots + 63 \end{aligned}$$

「面白い！」すっかり気分は福山雅治になり（ガリレオの湯川先生ですね）、トーンが上がります。更に、式を少し書き換えてみましょう。

$$\begin{aligned} 28 &= 2^2(2^3 - 1) \\ 2016 &= 2^5(2^6 - 1) \end{aligned}$$

28と2016の親和性を表す式がもう一つ得られました。

ところで、28は完全数でもあります。完全数とは、自分自身を除く約数の総和が自分自身になる数のことです。6が最初の完全数で、

$$6 = 1 + 2 + 3$$

28は2番目の完全数で、

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

ユークリッドは、 $M = 2^{p-1}(2^p - 1)$ と表せて、かつ、 $2^p - 1$ が素数であるとき、Mは完全数であることを証明しています。

Mの約数の総和は、 $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1})\{1 + (2^p - 1)\}$ ★を展開したのになります。

例えば、 $28 = 2^2(2^3 - 1)$ ならば、約数の総和は、 $(1 + 2 + 2^2)(1 + 7) = 1 + 2 + 2^2 + 7 + 2 \times 7 + 2^2 \times 7$ ですね。

ユークリッドの行った証明は、高校生の数列のよい勉強にもなるので、高校生風に簡単に証明を記しておきましょう。

★式の前のカッコの中は、初項が1、公比が2の等比数列の、初項から第p項までの和なので、

$$\frac{1(2^p - 1)}{2 - 1} = 2^p - 1 \text{ となります。}$$

つまり、Mの約数の総和は、 $2^p(2^p - 1) = 2M$ と表せます。よって、約数の総和からMを引いたものはM（自分自身）となるわけですね。

ということは、完全数とは「約数の総和が元の数の2倍になる」と言ってもいいことがわかります。「その数自身を除く約数の和が、その数自身と等しい自然数のこと」なんて回りくどい説明よりわかりやすい気がします。いかがでしょうか。

28も2016も完全数の形の式になっているのですが、2016の方は、 $2^6 - 1$ が素数ではないので完全数にならなかったわけです。

参考までに、2016の約数の総和は次のようになります。

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7)$$

さて、私は昨年度まで勤務していた大野高校の冬休み明けの始業式で、この顛末について話をしました。

以下、その内容を紹介します。

<前略>

年が明けて、平成28年となりました。そして西暦2016年です。実は、28に2を3回かけて、3を2回かけると2016になります。つまり、 $2016=28 \times 72$ です。また $2016=32 \times 63$ とも表せますが、実は1から63まで足していくと2016になります。また、 $28=4 \times 7$ で、1から

7まで足すと28です。

オマケに、3から9までの数を3乗して足すと何と2016になります。それから、28の自分自身を除く約数、1,2,4,7,14を全部足すと何と28になります。このような「自分自身以外の約数を全部足すと自分自身になる」という数を「完全数」と呼びます。

新年早々オタクな数学の話で恐縮です。私は、昔からこうして一人で数の不思議を考えることが好きでした。こんなことを考えて何になるんだと、よく人から言われます。

きっと、何にもなりません。お金持ちになれるわけでもありません。偉くなるわけでもありません。

でも、そこにある何かに興味を持ち、その美しさや、面白さを味わうこと、不思議なことを見つけ、自分の意思で考える楽しさを経験すること、これは、心が自由になることでもあると思います。

だからそれは、私にとってかけがえのないことです。だれにも強制されないし、だれも私に干渉し、止めることはできないのです。つまり、考える自由は誰も奪うことはできない宝物なのです。

なぜ、人は学ぶか。その答えの一つは、豊かな人生を送るためにあると思います。ならばそれは、人から管理され、強制されることや、他人の意見に迎合することでは得られないものだと思います。

強制され、叩き込まれる「勉強」では得られない経験、魂を自由にしたいという思いが、私を数学の世界に導きました。

そして、そんな数学の美しさや、考えることの楽しさを皆に伝えたいという気持ちから私は数学教師になろうと思いました。

ところで、皆さんは「満足」ってなんだと思いますか。

私が尊敬する数学者の野崎昭弘先生という方がこのようなことを述べています。

人より成績がよければ満足ですか、人よりお金がいっぱいあれば満足ですか。人より偉ければ満足ですか。

でもそんな満足は、自分よりもっと持っている人に出会えば簡単に消し飛んでしまいます。

満足とは、そんな「モノ」や「地位」を手にする事で得られるものだけではありません。

それよりも、人の優しさに触れること、人に優しくして感謝されること、スポーツで汗を流すこと、音楽を聴いて心を和ませること、このようなものも「満足」といえるのではないのでしょうか。

でも、もう一つ知って欲しい「満足」があります。それは「知的好奇心に燃える」ことであります。例えば、先ほど私が話したような、数の不思議について考えてみる。

「28の次の完全数は何だろう。」

「完全数は無限にあるのだろうか。」

「奇数の完全数はないのだろうか。」

それは、数学でなくたっていい。

「なぜイスラムの内紛は起こったのだろう。」

「松茸はなぜ人工栽培できないのか。」

更に、

「なぜ自分はここにいるか。」

「生きるとは何か。」

などなど。

今年が申年ですが、人間が猿と違うことは、

「問いを立てることができる」

ということではないのでしょうか。

人間の行動原理は「自分の周囲を見て状況を把握し、その上で課題や疑問などの問を立て、その解決に向けて行動する」というものではないかと思います。2016年、皆さんは是非、身の回りを見つめ、問を立てることを意識し、考える楽しさを経験する年にして欲しいと思います。

共にこの1年を楽しみましょう！

今回は、ちょっと時期のずれた話題になってしまいました。でも、その2つの話の根底には「数学という名の自由の翼」の精神があることを感じていただけましたでしょうか。