数学という名の自由の翼

第20回　2016年7月

たかが電卓　されど電卓

数学の授業で、電卓を使う場面がしばしば見られます。でも、単に「計算機」として筆算の肩代りをさせるだけの利用では芸がありませんね。

「数学と言う名の自由の翼」なんて口幅ったいことを謳っているこちらとしては、一味違った、例えば、電卓の良さというより、むしろ、電卓の不都合な部分を補うために数学を活用するとか、電卓の出力結果から数学的な考察を行うといった活動を取り上げてみたいと思います。

そういう意味では、関数電卓なんかより、むしろ普通に100均で売っている８桁電卓を利用した方が面白い授業が展開できます。

では、以前、私が行ったことがある実践事例を示したいと思います。尚、今回は高校以上の内容をターゲットにしています。

問題１　桁の問題

電卓の計算は２進数が基本になっている。８桁電卓では、２の何乗までの数が表示できるか。まず、電卓をたたく前に「数学を用いて」予測せよ。その後電卓を叩いて確かめよ。

ただし $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

８桁電卓で表示できる数は、10^8 より小さいので、$2^n < 10^8$ とすると、$n\log_{10}2 < 8$ より

$$n < \frac{8}{\log_{10}2} = 26.578\cdots$$

よって、$n = 26$ のとき最大となることがわかります。このとき、$2^{26} = 10^m$ とすると、

$m = 26\log_{10}2 = 7.826$

この、小数部分0.826に注目すると、対数表から、

$\log_{10}6 = 0.7781$、$\log_{10}7 = 0.8451$ なので、

$7.7781 < 7.826 < 7.8451$ と評価できて、

$10^7 \times 10^{0.7781} < 10^{7.826} < 10^7 \times 10^{0.8451}$

$\therefore 6 \times 10^7 < 2^{26} < 7 \times 10^7$

つまり、2^{26} の最高位の数は６であることが推察できます。

ここまで説明しておいてから、いよいよ電卓を叩きます。2×====･･･と続けていくと、26乗で67108864となりこれが最大で、確かに最高位が６であり、27乗目にはエラーになってしまうことが確かめられます。

同様に０に近い方を調べるため、１÷2====･･･　としていくと、24回で０になるので、小数は24ビットで計算されていることがわかります。つまり、８桁電卓では、$2^{27} \to \infty$、$2^{-24} = 0$ という特殊な閉じた数体系で定義された世界であり、出力した数値を過信してはいけないことが理解できます。

この課題は、思考と作業を循環的に行うことができるので、単にログの計算をするより、意味が理解できるのではないかと思います。また、数学の力で算出した結果が実際の場面と照合することができるので、数学の良さを実感できるとも思われます。

問題２　数列の極限

(1)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ を考える

①　任意の正の数を置く　（例えば３）

②　ルートキーをひたすらたたく。何が言えそうか。

⑵　⑴の操作の間に「＋１」を入れる

①　任意の正の数を置く　（例えば３）

②　「＋１＝√」を１セットにして、この操作をひたすら繰り返す

③　値が安定する。安定した値はどんな数か。また、なぜそのようになるか考えよ。

---

(1)　どんな数からスタートしても30回以内で1になります。このことから

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

が実感できると思います。

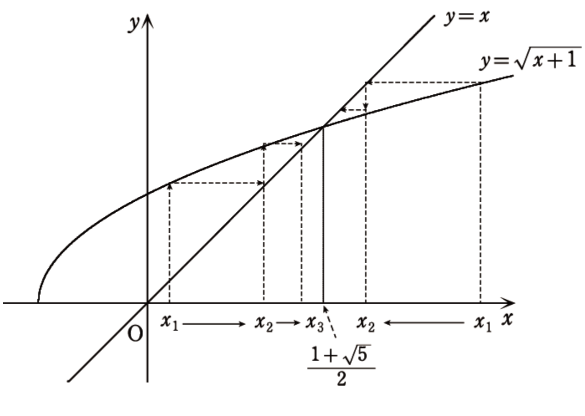
⑵　任意にaをとって、「a＋1＝√＋1＝√＋1＝√‥‥」とすれば、a の値に関わらず、値が安定し、その値は、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339$ という黄金比になります。つまり黄金比は「＋１＝√」という操作に関して不変な値ということです。

この結果から、少し難しいのですが、以下のように、数学Ⅲの数列の極限の話へと進めます。

$x^2-x-1=0\ (x>0)$ を考えます。

この式から、$x=\sqrt{1+x}$ とおけます。

つまりこの方程式の解は、$y=x$ と $y=\sqrt{1+x}$ の交点のx座標を考えればいいことがわかります。これは、$x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}\ \ (x_1=a)$ という漸化式の特性方程式から極限値を求めることと同じです。



$y=\sqrt{1+x}$ が単調増加関数であることがポイントです。初項が黄金比より小さければ、単調に増加して極限値である交点に限りなく近づいていくこと、初項が黄金比より大きい時は，単調に減少して極限値に向かうことがグラフからイメージできます。たかが電卓ですが、「単調有界数列は収束する」という実数論まで広げることもできる話題になるかもしれません。

問題３　e の値と桁落ち

次の計算を電卓で行え

$\left(\frac{3}{2}\right)^2$　(3÷2×＝)　$\left(\frac{5}{4}\right)^4$　(5÷4×＝×＝)

$\left(\frac{9}{8}\right)^8$　(9÷8×＝×＝×＝)

$\left(\frac{17}{16}\right)^{16}$，$\left(\frac{33}{32}\right)^{32}$，$\left(\frac{65}{64}\right)^{64}$，$\left(\frac{129}{128}\right)^{128}$，$\left(\frac{257}{256}\right)^{256}$

※　ここまで計算してみて、このまま$\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$ を計算していくとどのようになるか考えてみよ。

$\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$ において、n を大きくしていくことは、

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$$

という極限を考えていることなので、自然対数の底 e に収束してくことが予想されます。

実際に計算してみると、順に

2.25→2.4414062→2.5657843→2.6379272→2.6769858→2.6973375→2.7077238→2.7129225

e＝2.718281828459045‥‥ なので，単調に増加しながら極限値に近づいていくことがわかります。

さて、ここで話は終わりません。更に続きを計算していきます。

$\left(\frac{513}{512}\right)^{512}$，$\left(\frac{1025}{1024}\right)^{1024}$，$\left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}$，$\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096}$

この計算結果からどんなことがわかるかを考えます。

計算結果は、順に

2.7155295

2.7166763

2.7169548‥‥※1

2.7169548‥‥※2

順調に e に近づくと思ったら、何と、※１と※２が同じ値になってしまいました。なぜでしょう。
※１は、

$\left(\frac{2049}{2048}\right)^{2048}=\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)^{2^{11}}$ です。

ところが、※２は、

$\left(\frac{4097}{4096}\right)^{4096}=\left(1+\frac{1}{2^{12}}\right)^{2^{12}}=\left\{\left(1+\frac{1}{2^{12}}\right)^{2}\right\}^{2^{11}}$

$=\left(1+2\times\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{24}}\right)^{2^{11}}$ ★

$=\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)^{2^{11}}$

★がポイントです。問題１で述べたように、８桁電卓上では、$2^{-24}=0$ なので、桁落ちが生じてしまい、ちょうど、※１＝※２となるのです。まさに「式の展開」が、電卓のメカニズムを解き明かした感動的瞬間です！（大げさですが）

よって、これ以降、n を大きくしていっても、どんどん不正確な値になっていくことがわかります。この話題は、数学Ⅲの内容だけでなく、２進数や、コンピュータにおける値の評価や信頼性などの実用的な問題を含んでいると思います。

問題４ e の値と誤差評価
次の計算をせよ。
１［M+］ ÷ 1=[M+］ ÷ 2=[M+］ ÷ 3=[M+］ ÷ 4=[M+］÷5=[M+］・・・・・÷10=[M+]
最後に[MR]
※どのような数が得られたか．この数の精度を考えてみよ。

これは、$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$ という式の計算を表しています。８桁電卓での計算の値は、2.7182814 と表示されます。これは相当いい近似で、小数点以下第６位まであっています。なぜ、このように６桁保証されるか考えてみましょう。

$f(x)=e^x$ のテーラー展開、

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$$

から、$x=1$ とすると、e の値が求まります。ここで、$\frac{1}{10!}$ まで計算した時の精度について次のように考えてみます。

$$\frac{1}{10!}=\frac{1}{3628800}=0.000000275<3\times10^{-7}$$

すると、

$$\frac{1}{11!}<\frac{1}{11}\times3\times10^{-7}<3\times10^{-8}$$

$$\frac{1}{12!}<\frac{1}{12}\times3\times10^{-8}<3\times10^{-9}$$

$$\frac{1}{13!}<\frac{1}{13}\times3\times10^{-9}<3\times10^{-10}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

このことから、

$$\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}+\cdots<0.0000000333\cdots$$

つまり、$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$ の値は、それ以後の計算によって、下７桁に影響を与えることが無いことがわかります。（ただし８桁電卓では最後の桁に誤差が含まれているので６桁精度になる）

今回の話題は少し高校の範囲を逸脱するものもありましたが、100 円電卓でも、意外に深い学びができる可能性があることがわかります。

この他、整除の性質を用いて、無限循環小数の値を求めたり、漸化式を応用して２の三乗根を求めるなど、更に面白い展開も考えられます。

今回は、100 円電卓を用いての話題でしたが、このような身近な事象に着目し、そこに潜む「数学の世界」を見つけていくことは、教師と生徒がともにワクワク感を抱きながら、「数学と言う名の自由の翼」を手に入れることなのかもしれません。