数学という名の自由の翼

第18回　2016年5月

Roll Over Center Test

センター試験の数学の問題を見ていて、時々、一体何を考えているんだろうと思うことがあります。いやいや、私は、これまで、幾度となく、センター試験を弁護してきた、むしろセンター試験擁護派でもあるのです（買い被り派？）。

例えば、あの無用とも思える長い誘導は、「読解力と判断力を見るための有効な手続き」と積極的に評価し、また、裏技的手法から無節操に解けてしまう問題については「文脈を判断し、演繹的に考えるだけでなく、帰納的に推理したり、仮説設定したり、類推したり、逆方向から見たりするなどのメタ認知的な力も数学だ」などと、センター試験を庇う視点で論じてきました（かなり苦しいですね）。

そんな私でも、こうも毎年変な問題が出てくるとねえ。もう庇いきれないっすよ。

では、そんな問題をいくつか眺めてみましょう。

第１問

［２］連立方程式

$$(※)\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \quad ■ \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x,y,z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする．

$X=2^x, Y=2^y, Z=2^z$　とおくと，　$x \leqq y \leqq z$ により，

$X \leqq Y \leqq Z$ である。（※）から，　X,Y,Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ=\boxed{ソ} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}} \end{cases}$$

が得られる。この関係式を利用すると，t の３次式

$(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は

$(t-X)(t-Y)(t-Z)$

$=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$

$=t^3-\dfrac{35}{2}t^2+\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}t-\boxed{ソ}$

$=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{テ}\right)\left(t-\boxed{トナ}\right)$　となる。

したがって，$X \leqq Y \leqq Z$ により

$X=\dfrac{1}{2}$，$Y=\boxed{テ}$，$Z=\boxed{トナ}$　となり，★

$x=\log_{\boxed{ニ}}X$，$y=\log_{\boxed{ニ}}Y$，$z=\log_{\boxed{ニ}}Z$

から　$x=\boxed{ヌネ}$，$y=\boxed{ノ}$，$z=\boxed{ハ}$

であることがわかる。

2013年　数学ⅡＢ

３元の連立指数方程式という恐ろしい問題ですが、３次方程式の解と係数の関係を経由するという、高尚な誘導がついています。

でも、結論を見てください。

$x=\boxed{ヌネ}$　，$y=\boxed{ノ}$　，$z=\boxed{ハ}$

つまり、x、y、z　の値が整数になっているので、問題文の■の式を満たす解は簡単に類推できます。

ここで、皆さんも■だけを見て、x、y、z　の値を求めてみてください。

でも、もっと言えば、★部分を見ると、なんと！

$X=\frac{1}{2}$ が与えられているではありませんか！

ここから、$x=-1$ がわかるので、■より、

$2^y+2^z=17=1+16=2^0+2^4$　と類推できて、

$y=0$、$z=4$　$(y \leqq z)$　がユニークに決定します。

以下、$Y=1$、$Z=16$ となるので、この問題はすべてたちどころに解決してしまいました。

まるで、推理小説で、有能な探偵が状況証拠から論理を組み立てて犯人を特定しようとしている時に、犯人がいきなり自供してしまったようなものですね。

いやいや、センター試験を侮ってはいけない。これもきっと作題者の深い読みの範囲なのだ（と思うことにしよう）。

計算機科学などで使われる用語に、ヒューリスティックス（heuristic）といわれるものがあります。これは、演繹的に推論する方向ではなく、少ない努力で解を求める方法、あるいは、経験や直観による発見的な思考法といった意味を持ちます。作題者は、ヒューリスティックスな考えを評価しようとしていたのだ。きっとそうに違いない！（とでも思わないとやっていけない）

問題解決とは論理のステップを正しく追っていくことでは必ずしもない。つまり、上のような解答をした人には「俯瞰的に見る力」を持っている「ご褒美」として早回りして解答を求める仕掛けが施してあったのだ！（とうとう決めつけてしまった）。

大学の解析学で学ぶε－δ論法という証明法は、結論の式を先に作って、そこから前提に結びつけていくように辻褄を合せる記述を行うことから、私が大学時代には「刑事コロンボ型証明法」と呼んでいました（最近の若い方は「刑事コロンボ」を知らない人が多いので、「相棒」でもいいでしょう）。

このようなタイプの刑事もののドラマが人気なのは、状況証拠から理詰めで論理的に犯人を絞るのではなく、最初に視聴者に犯人を提示し（または主人公が類推し）、状況証拠とすりあわせていくところに面白さがあるからではないかと思います。

だから、きっとこの問題は、そんなことも意図して作題されたに違いない！（しつこいですが、ウソでもそうでも思わないとやっていけないので）。

では、次に、昨年の数学ⅡBの三角関数の問題を見てみましょう。まず前段部分です。

［１］ Oを原点とする座標平面上の2点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $\mathrm{Q}(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える。ただし、$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $\mathrm{OP}=\boxed{ア}$，$\mathrm{PQ}=\boxed{イ}$ である。また、

$$\mathrm{OQ}^2=\boxed{ウ}+\boxed{エ}(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$$
$$=\boxed{ウ}+\boxed{エ}\cos\left(\boxed{オ}\theta\right)\quad である。$$

よって、$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で、

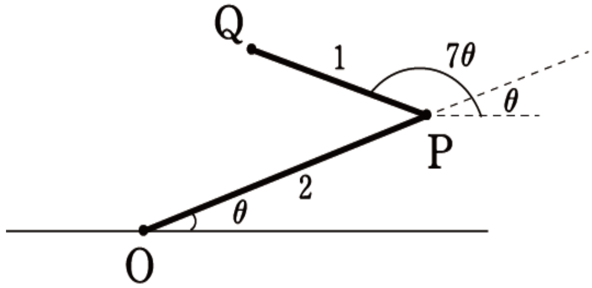
OQは $\theta=\frac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる。

この問題はずばり、

$(2\cos\theta, 2\sin\theta)+(\cos 7\theta, \sin 7\theta)$

と分解して「折れ線の回転」と見る問題です。

つまり、次のような図をイメージします。



しかし、なぜか、そういう視点を敢えて隠し、２点間の距離の公式と、加法定理の「逆追い変形」という、代数計算の手法に受験者を誘導しています。

センター試験ではこのように図形的に考えればスマートに解けるものを敢えてイバラの道に誘導していく問題をよく見かけます。

因みに、私の解答は以下の通り。

$OQ^2=2^2+1^2-2\cdot 1\cdot\cos(\pi-6\theta)=5+\cos 6\theta$

一行で終わってしまいました。

折れ線の回転でイメージしていれば、OQ^2 は、上のように、三角形の余弦定理で求めるのが自然。

図形で考えるのは受験生には大変だから、というのなら最初からこんな問題を出すべきではないと私は思うのですが・・・。

では、めげずに、歯を食いしばって、続きを見ていきましょう。

(2)　3点O，P，Qが一直線上にあるようなθの値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　　①　$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$

②　$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　　③　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより、$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、3点O，P，Qが

一直線上にあるのは、$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3)　∠OQPが直角となるのは$\mathrm{OQ}=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。

したがって、$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で∠OQPが直角となるのは

$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

---

(2)のO,P,Q が一直線上にあるときのθですが、この誘導も感心しませんね。OP の直線の方程式を求めさせ、Q がその直線上にあるということから、代入して方程式を解く、という流れです。
恐らくこんな解答を要求してるのでしょう。

OPの方程式は、$y=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}x$

すなわち　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

Qがこの直線上にあるから

$\sin\theta(2\cos\theta+\cos7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin7\theta)=0$

$\sin\theta\cos7\theta-\cos\theta\sin7\theta=0$

$\sin(\theta-7\theta)=0$

$\therefore -\sin6\theta=0$

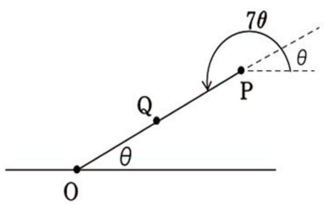
$\sin6\theta=0$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$　より

$6\theta=\pi$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$

いきなり、x , y が登場したり、変形も加法定理を駆使するなど、とても煩雑ですね。

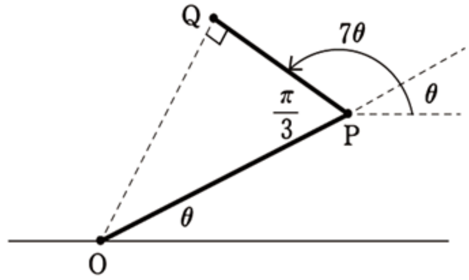
θを求めるなら、普通は動径を調べればいいと思いませんか？私は左のように解きました。計算は殆どありません。



$7\theta=\theta+\pi$　より

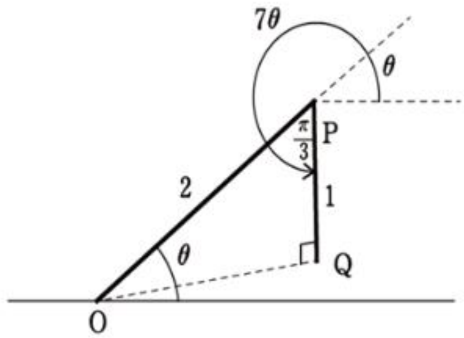
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(3)も同様に考えてみましょう。



$7\theta=\theta+\dfrac{2}{3}\pi$　$\therefore\theta=\dfrac{1}{9}\pi$

これはθ の範囲に適さない



$7\theta=\theta+\pi+\dfrac{\pi}{3}$　$\therefore\theta=\dfrac{2}{9}\pi$

とても簡単でしょう。図形的な見方をすることよって問題の意味が見えてきます。

一方、作題者が要求する方向、つまり、代数計算に落し込めると、意味はわからなくても「手の運動」の世界で解答にたどり着きます。それこそが、数学の良さだ！なんてミもフタも無いことをいうのは、もうやめておきましょう。

以前、数学者の寺田文行氏は、「入試問題は生徒をエンカレッジするものでなければならない」とおっしゃっていましたが、このセンター試験の問題の誘導は、「数学的な見方考え方」を重視する現行の学習指導要領の趣旨とは異なるような気がします。

まるで、数学とは、意味など考えなくても、ある前提と条件から、数式という数学的言語に変換して、公式と計算によって結論にたどり着く。それ以上でもそれ以下でもない、とでもいうかのように。